**1**

問題のページへ

(1)　線分 OA の垂直二等分線の方程式は，中点が$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 1)$より，

$$t\left(x-\frac{1}{2}t\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)=0,\ 2tx+2y-t^2-1=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①を $t$ についてまとめると，$t^2-2xt-2y+1=0\cdots\cdots\cdots②$

すると，$|t|\geqq 1$ のとき直線①が通過する点$(x,\ y)$は，$t$ についての 2 次方程式②が$|t|\geqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ$(x,\ y)$の条件として求められる。

ここで，$f(t)=t^2-2xt-2y+1=(t-x)^2-x^2-2y+1$ とおくと，

(i)　$|x|\geqq 1$ $(x\leqq -1,\ 1\leqq x)$のとき

求める条件は，$f(x)=-x^2-2y+1\leqq 0$ より，

$$y\geqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

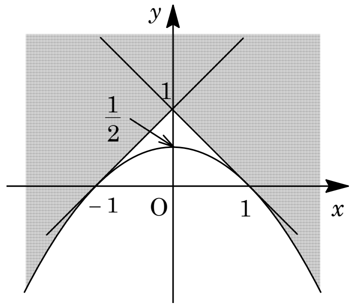
(ii)　$|x|<1$ $(-1<x<1)$のとき

求める条件は，$f(1)=1-2x-2y+1\leqq 0$ または $f(-1)=1+2x-2y+1\leqq 0$ より，

$$y\geqq -x+1 \text{ または } y\geqq x+1$$

(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含む。




## [解 説]

直線の通過領域を求める頻出問題です。2 次方程式の実数解の条件として処理をしています。

**2**

問題のページへ

(1)　自然数 $n$ に対し，$f_n(t)=e^{-t^n}$ とおくと，$F_n(x)=\int_x^{2x} f_n(t)dt$ より，

$$F_n{}'(x)=f_n(2x)\cdot 2-f_n(x)=2e^{-(2x)^n}-e^{-x^n}=e^{-x^n}\left(2e^{-(2^n-1)x^n}-1\right)$$

ここで，$g(x)=2e^{-(2^n-1)x^n}-1$ とおくと，$2^n-1\geqq 1$ から，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し，

$$g(0)=2-1=1,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(2e^{-(2^n-1)x^n}-1\right)=-1$$

これより，$x\geqq 0$ において，$g(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもち，

$$e^{-(2^n-1)x^n}=\frac{1}{2},\ -(2^n-1)x^n=-\log 2,\ x^n=\frac{\log 2}{2^n-1}$$

よって，$x=\left(\frac{\log 2}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ となり，この値を $x=\alpha$ とおくと，$F_n(x)$ の増減は右表のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_n{}'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $F_n(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

すると，関数 $F_n(x)$ $(x\geqq 0)$ はただ 1 つの点で最大値をとり，$F_n(x)$ が最大となる $x$ の値 $a_n$ は,

$$a_n=\alpha=\left(\frac{\log 2}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(2)　(1)より，$\log a_n=\frac{1}{n}\log\left(\frac{\log 2}{2^n-1}\right)=\frac{\log(\log 2)}{n}-\frac{\log(2^n-1)}{n}$

ここで，自然数 $n$ に対し，$2^{n-1}\leqq 2^n-1<2^n$ より，

$$(n-1)\log 2\leqq\log(2^n-1)<n\log 2,\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\log 2\leqq\frac{\log(2^n-1)}{n}<\log 2$$

よって，$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(\log 2)}{n}-\frac{\log(2^n-1)}{n}\right\}=-\log 2$

## [解 説]

関数の形が複雑なため，式変形に注意力が要求されますが，内容的は基本的です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$l: y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ と $C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ を連立すると,

$$x^2+(\tan^2\alpha)x^2=1,\ \ \frac{1}{\cos^2\alpha}x^2=1,\ \ x=\pm\cos\alpha$$

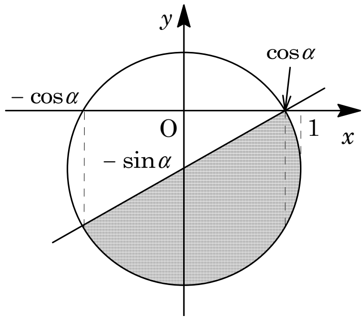
すると，$y=\pm\sin\alpha-\sin\alpha$ から，$x=\cos\alpha$ のとき $y=0$，$x=-\cos\alpha$ のとき $y=-2\sin\alpha$ となり，$l$ と $C$ の交点は，$(\cos\alpha,\ 0)$，$(-\cos\alpha,\ -2\sin\alpha)$ である。

(2)　$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ とおくと，$f(-x)=f(x)$ から，$f(x)$ は偶関数であり，

$$\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

よって，$2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

(3)　$y\leqq(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ かつ $x^2+(y+\sin\alpha)^2\leqq1$ の表す図形 $D$ は右図の網点部となる。ここで，$D$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V$ とする。




さて，$C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ より，

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}-\sin\alpha$$

そこで，$V_1=\pi\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\left(-\sqrt{1-x^2}-\sin\alpha\right)^2dx$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi(2\sin\alpha)^2\cdot2\cos\alpha=\frac{8}{3}\pi\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$V_3=\pi\int_{\cos\alpha}^{1}\left\{\left(-\sqrt{1-x^2}-\sin\alpha\right)^2-\left(\sqrt{1-x^2}-\sin\alpha\right)^2\right\}dx$$

すると，$V=V_1-V_2+V_3$ となり，

$$\begin{aligned}V_1&=\pi\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}(1-x^2+\sin^2\alpha)dx+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=2\pi\int_0^{\cos\alpha}(-x^2+1+\sin^2\alpha)dx+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=2\pi\Big[-\frac{x^3}{3}+(1+\sin^2\alpha)x\Big]_0^{\cos\alpha}+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=-\frac{2}{3}\pi\cos^3\alpha+2\pi(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=-\frac{8}{3}\pi\cos^3\alpha+4\pi\cos\alpha+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx\end{aligned}$$

$$V_2=\frac{8}{3}\pi\cos\alpha-\frac{8}{3}\pi\cos^3\alpha$$

$$V_3=\pi\int_{\cos\alpha}^{1}4\sin\alpha\sqrt{1-x^2}\,dx=4\pi\sin\alpha\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

(2)から，$2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$V=4\pi\cos\alpha-\frac{8}{3}\pi\cos\alpha+2\pi\sin\alpha\left\{\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx+2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\pi\cos\alpha+2\pi\sin\alpha\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\pi\cos\alpha+\pi^2\sin\alpha$$

**[解 説]**

(3)では，求積の方法について迷いますが，(2)の結果を活用することを考えるのが，本問では最適でしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　条件より，$a_1=1$，$(n+3)a_{n+1}-na_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$ から，

$$(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1}-n(n+1)(n+2)a_n=(n+2)-(n+1)$$

$b_n=n(n+1)(n+2)a_n$ より，$b_{n+1}-b_n=1$ となるので，

$$b_n=b_1+(n-1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_1+n-1=n+5$$

(2)　(1)より，$p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=n+5$ の係数を比べて，

$$p+q+r=0\cdots\cdots①,\ 3p+2q+r=1\cdots\cdots②,\ 2p=5\cdots\cdots③$$

③より，$p=\dfrac{5}{2}$ となり，①②に代入して，$q+r=-\dfrac{5}{2}$，$2q+r=-\dfrac{13}{2}$

これより，$q=-4$，$r=\dfrac{3}{2}$

(3)　(1)より，$a_n=\dfrac{n+5}{n(n+1)(n+2)}$ となり, (2)の結果を用いると，

$$a_n=\frac{p}{n}+\frac{q}{n+1}+\frac{r}{n+2}=\frac{5}{2n}-\frac{4}{n+1}+\frac{3}{2(n+2)}$$
$$=\frac{5}{2n}-\frac{5+3}{2(n+1)}+\frac{3}{2(n+2)}=\frac{5}{2}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)-\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big)$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{5}{2}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)-\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\Big)=\frac{5}{2}\cdot\frac{n}{n+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2(n+2)}$

$$=\frac{10n(n+2)-3n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(7n+17)}{4(n+1)(n+2)}$$

## [解 説]

(3)の解法は，上のようなものが想定されていると思われますが，もし $4=\dfrac{5+3}{2}$ に気付かなかったときは，(2)を無視し，$a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{5}{n(n+1)(n+2)}$ として和を求めます。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$A^2-7A+10E=O$ より，$(A^2-7A+10E)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ………①

また，条件より，$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$ ……②なので，$A^2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$ となり，①から，

$$A\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}+10\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\40\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\cdots③$$

(2)　③より，$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ となり，②と合わせて，$A\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&10\\4&10\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}6&10\\4&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&10\\4&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}$$

よって，$a=4$，$b=2$，$c=1$，$d=3$

(3)　直線 $l$ の方程式を，$x=k$ または $y=mx+n$ とおく。

(i)　$l:x=k$ のとき

$t$ を任意の実数として，直線 $l$ 上の任意の点を $(k,\ t)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4k+2t\\k+3t\end{pmatrix}$$

点 $(u,\ v)$ は $l$ 上の点より，$4k+2t=k$，$3k+2t=0$ ………④

しかし，任意の $t$ に対して，④が成立する定数 $k$ は存在しない。

(ii)　$l:y=mx+n$ のとき

$t$ を任意の実数として，直線 $l$ 上の任意の点を $(t,\ mt+n)$ とおくと，

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\mt+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(4+2m)t+2n\\(1+3m)t+3n\end{pmatrix}$$

点 $(u,\ v)$ は $l$ 上の点より，$(1+3m)t+3n=m\{(4+2m)t+2n\}+n$ ………⑤

任意の $t$ に対して，⑤が成立する条件は，

$$1+3m=m(4+2m)\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad 3n=2mn+n\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥より，$2m^2+m-1=0$，$(2m-1)(m+1)=0$ となり，$m=\frac{1}{2},\ -1$

⑦より，$(m-1)n=0$ となり，$m=\frac{1}{2},\ -1$ のいずれのときも，$n=0$ である。

(i)(ii)より，直線 $l$ の方程式は，$y=\frac{1}{2}x$ または $y=-x$ である。

## [解　説]

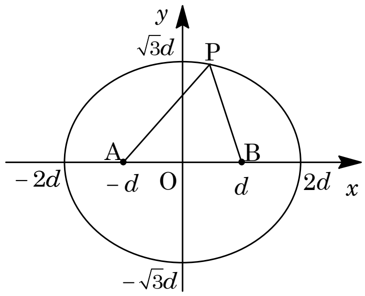
1 次変換の基本題で，どの設問もいろいろな解法があります。その 1 つの解答例を記しました。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　焦点が $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ より，楕円 $E$ の中心は原点となるので，

$$E : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a^2-b^2=d^2)$$




条件より，$2a=4d$ から，$a=2d$ となり，

$$b^2=a^2-d^2=3d^2,\ b=\sqrt{3}d$$

これより，長軸の長さは $2a=4d$，短軸の長さは $2b=2\sqrt{3}d$ となる。

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=(x+d)^2+y^2+(x-d)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2d^2$$
$$=2\mathrm{OP}^2+2d^2 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=4d$ なので，①より，

$$2\mathrm{OP}^2+2d^2=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=16d^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$$

よって，$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=8d^2-\mathrm{OP}^2-d^2=7d^2-\mathrm{OP}^2 \cdots\cdots\cdots②$

(3)　$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP})$ なので，①②より，

$$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3=4d(2\mathrm{OP}^2+2d^2-7d^2+\mathrm{OP}^2)=4d(3\mathrm{OP}^2-5d^2)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\sqrt{3}d \leqq \mathrm{OP} \leqq 2d$ から $3d^2 \leqq \mathrm{OP}^2 \leqq 4d^2$ であり，③より，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値は $4d(12d^2-5d^2)=28d^3$，最小値は $4d(9d^2-5d^2)=16d^3$ となる。

## [解 説]

楕円の定義について，基本事項を確認する問題です。なお，①式は中線定理です。