1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ より，$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$，$f(3)=9-\frac{9}{2}a$

$f(-1)\leqq f(3)$ から，$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\leqq 9-\frac{9}{2}a$ となり，$a\leqq\frac{7}{3}$

$a>0$ と合わせて，$0<a\leqq\frac{7}{3}$

(2)　$f'(x)=x^2-ax=x(x-a)$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，条件より，極小値 $f(a)=-\frac{1}{6}a^3$ が $f(-1)$ 以下であることから，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}a^3$	$\nearrow$

$$-\frac{1}{6}a^3\leqq-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a,\ a^3-3a-2\geqq 0,\ (a+1)^2(a-2)\geqq 0$$

$a>0$ より, $a\geqq 2$

(3)　(i)　$0<a<3$ のとき

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり, (2)の結果から，最小値は,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}a^3$	$\nearrow$	

(i-i)　$0<a<2$ のとき　$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$

(i-ii)　$2\leqq a<3$ のとき　$f(a)=-\frac{1}{6}a^3$

(ii)　$a\geqq 3$ のとき

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり, (1)の結果から，最小値は,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$$f(3)=9-\frac{9}{2}a$$

[解 説]

(1)と(2)の誘導によって, (3)は計算が不要となっています。

2

問題のページへ

(1) $C_1: y=\sin x$ ……①, $C_2: y=\cos x$ ……②, $C_3: y=\tan x$ ……③に対し,

まず, C_1 と C_2 の交点は, ①②から, $\sin x=\cos x$ より, $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ より, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

また, C_2 と C_3 の交点は, ②③から, $\cos x=\tan x$ より,

$$\cos^2 x=\sin x\,,\ \ \sin^2 x+\sin x-1=0$$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ における解を $x=\alpha$ とおくと, $\sin\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$y=\cos\alpha=\sqrt{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

さらに, C_3 と C_1 の交点は, ③①から, $\tan x=\sin x$ より, $\sin x(\cos x-1)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ より, $x=0$, $y=0$

(2) C_1, C_2, C_3 によって囲まれる図形の面積 S は,

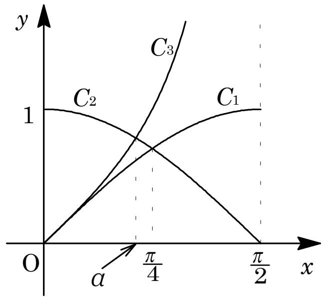
$$S=\int_0^{\alpha}\tan x\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$$

$$=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\alpha}+\Big[\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\log(\cos\alpha)+\log 1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$=-\log\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-1$$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$$



[解 説]

基本的な求積問題です。まったく同じ問題を解いたという記憶はあるものの, 出典は思い浮かびません。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$f(x)$ は単調増加する連続関数なので，$k-1\leqq x\leqq k$ において，$f(x)\leqq f(k)$

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqq \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = f(k)\int_{k-1}^{k} dx = f(k)$$

(2)　$x>0$ で $f(x)=\log x$ とおくと，$f(x)$ は単調増加する連続関数なので, (1)から,

$$\int_{k-1}^{k} \log x\,dx \leqq \log k \cdots\cdots\cdots①$$

$n\geqq 2$ のとき，①の両辺を，$k=2$ から $k=n$ まで和をとると，

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \log x\,dx \leqq \sum_{k=2}^{n}\log k$$

$$\int_{1}^{n} \log x\,dx \leqq \log 2+\log 3+\cdots+\log n = \log(2\times 3\times\cdots\times n) = \log n! \cdots\cdots\cdots②$$

なお, ②は $n=1$ のときも成立している。

さて, ②の左辺は,

$$\int_{1}^{n} \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^n = n\log n - n + 1 = \log n^n + \log e^{1-n} = \log n^n e^{1-n}$$

これより, ②は，$n^n e^{1-n}\leqq n!$ となる。

(3)　$x\geqq 0$ において，$g(x)=x^n e^{1-x}-n!$ とおくと，

$$g'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = x^{n-1}e^{1-x}(n-x)$$

$g(x)$ の増減は右表のようになり, (2)より,

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$g'(x)$	0	＋	0	−
$g(x)$		↗		↘

$$g(n) = n^n e^{1-n} - n! \leqq 0$$

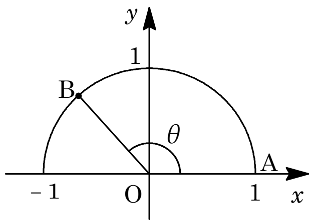
よって, $x\geqq 0$ において，$g(x)\leqq 0$ すなわち $x^n e^{1-x}\leqq n!$ である。

[解 説]

至れり尽くせりというぐらい，誘導が非常に細かくついている微分法の不等式への応用問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(90^\circ<\theta<180^\circ)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(p,\ q)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(r,\ s)$ とおく。

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ より，

$p=1$ ………①，$p\cos\theta+q\sin\theta=0$ ………②

①②より，$q=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1,\ -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=1$ より，

$r=0$ ………③，$r\cos\theta+s\sin\theta=1$ ………④

③④より，$s=\dfrac{1}{\sin\theta}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

(2)　$\triangle$OAB の面積を S_1，$\triangle$OCD の面積を S_2 は,

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta,\quad S_2=\frac{1}{2}\left|1\cdot\frac{1}{\sin\theta}+0\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|=\frac{1}{2\sin\theta}$$

$S_2=2S_1$ より，$\dfrac{1}{2\sin\theta}=\sin\theta$，$\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，$\theta=135^\circ$

このとき，$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となる。

(3)　(2)より，$S=4S_1+3S_2=2\sin\theta+\dfrac{3}{2\sin\theta}$ となり，$\sin\theta>0$ から,

$$2\sin\theta+\frac{3}{2\sin\theta}\geqq2\sqrt{2\sin\theta\cdot\frac{3}{2\sin\theta}}=2\sqrt{3}$$

等号は，$2\sin\theta=\dfrac{3}{2\sin\theta}$ すなわち $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\theta=120^\circ)$ のとき成立する。

よって，$\theta=120^\circ$ のとき, S は最小値 $2\sqrt{3}$ をとる。

[解 説]

ベクトルの成分計算についての基本問題です。

5

問題のページへ

(1) E を単位行列とすると，条件より，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ (A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ より，$A-E = \begin{pmatrix} a & a \\ 3 & a+1 \end{pmatrix}$ は逆行列が存在しないので，

$$\det(A-E) = a(a+1)-3a = 0,\ a^2-2a=0$$

よって，$a=0,\ 2$ である。

(2) 直線 $l: y=kx+1$ 上の任意の点を $(t,\ kt+1)$ とおく。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ kt+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+1+ak)t+a \\ (3+ak+2k)t+a+2 \end{pmatrix}$$

条件より，$Y=kX+1$ なので，

$$(3+ak+2k)t+a+2 = k\{(a+1+ak)t+a\}+1$$

任意の t に対して成立することより，

$$3+ak+2k = k(a+1+ak)\cdots\cdots\cdots①,\ a+2=ak+1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$ak^2-k-3=0\cdots\cdots\cdots③$

②より，$a(k-1)=1$，$a=\dfrac{1}{k-1}\quad(k\neq1)\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\dfrac{k^2}{k-1}-k-3=0$，$k^2-(k^2+2k-3)=0$，$k=\dfrac{3}{2}$

すると，④より，$a=2$

(3) (2)より，$l: y=\dfrac{3}{2}x+1$ となり，$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ である。

直線 l 上の点を $\left(p,\ \dfrac{3}{2}p+1\right)$ とおくと，(＊)から，

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ \frac{3}{2}p+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$p+\left(\dfrac{3}{2}p+1\right)=0$ から $p=-\dfrac{2}{5}$ となり，l 上の不動点は，$\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ である。

[解 説]

不動点と不変直線に関する基本事項の確認です。(3)は，不動点の集合である直線 $x+y=0$ と $l: y=\dfrac{3}{2}x+1$ との交点として求めることもできます。

6

問題のページへ

(1) 楕円$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上の接点を$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$とおくと，接線の方程式は，

$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x+\frac{b\sin\theta}{b^2}y=1,\ \ \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1\cdots\cdots\cdots①$$

①が直線$l: mx+ny=1$に一致することより，

$$m=\frac{\cos\theta}{a},\ \ n=\frac{\sin\theta}{b}$$

これより，$a^2m^2+b^2n^2=1\cdots\cdots$②となり，点$(m,\ n)$の軌跡は楕円になる。

(2) C の焦点$F_1(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$F_2(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$と$l: mx+ny-1=0$との距離を，それぞれd_1，d_2とすると，

$$d_1=\frac{\left|-m\sqrt{a^2-b^2}-1\right|}{\sqrt{m^2+n^2}},\ \ d_2=\frac{\left|m\sqrt{a^2-b^2}-1\right|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

すると，$d_1d_2=\dfrac{\left|-m^2(a^2-b^2)+1\right|}{m^2+n^2}=\dfrac{\left|-a^2m^2+b^2m^2+1\right|}{m^2+n^2}$

②を代入すると，$d_1d_2=\dfrac{\left|b^2n^2+b^2m^2\right|}{m^2+n^2}=\dfrac{b^2(n^2+m^2)}{m^2+n^2}=b^2$

［解 説］

(1)では，接線の公式を利用しました。重解条件の利用によっても②を導けますが，計算量はかなり増加します。