

1

解答解説のページへ

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a > 0$ とする。

- (1) $f(-1)$ $f(3)$ となる a の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下になる a の範囲を求めよ。
- (3) $-1 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

3つの曲線

$$C_1: y = \sin x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), C_2: y = \cos x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), C_3: y = \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点, C_2 と C_3 の交点, C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。
- (2) C_1, C_2, C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とし、1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して、不等式 $\int_{k-1}^k f(x) dx \geq f(k)$ を示せ。
- (2) 不等式 $\int_1^n \log x dx \geq \log n!$ を示し、不等式 $n^n e^{1-n} \geq n!$ を導け。
- (3) $x \geq 0$ に対して、不等式 $x^n e^{1-x} \geq n!$ を示せ。

4

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標平面上に、2 点 $A(1, 0)$, $B(\cos\theta, \sin\theta)$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) をとり、以下の条件を満たす 2 点 C, D を考える。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 1, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 1$$

また、 OAB の面積を S_1 , OCD の面積を S_2 とおく。

- (1) ベクトル \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} の成分を求めよ。
- (2) $S_2 = 2S_1$ が成り立つとき、 θ と S_1 の値を求めよ。
- (3) $S = 4S_1 + 3S_2$ を最小にする θ と、そのときの S の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

a を実数とし, $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$ とする。2点 $P(x, y)$, $Q(X, Y)$ について

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき, P は A により Q に移るといふ。

- (1) 原点以外の点で, A によりそれ自身に移るものが存在するとき, a を求めよ。
- (2) 次の条件(*)を満たす a, k を求めよ。
 (*) 直線 $l: y = kx + 1$ 上のすべての点は, A により l 上の点に移る。
- (3) (*)を満たす a, k に対し, 直線 l 上の点で, A によりそれ自身に移るものを求めよ。

6

解答解説のページへ

直線 $l: mx + ny = 1$ が、楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) に接しながら動くとする。

- (1) 点 (m, n) の軌跡は楕円になることを示せ。
- (2) C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と l との距離を d_1 とし、もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ と l との距離を d_2 とする。このとき $d_1 d_2 = b^2$ を示せ。