1

問題のページへ

(1)　$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

$$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(2)　$x = 2\cos 80°$ とおくと，$\cos 80° = \dfrac{x}{2}$ となり, (1)より,

$$\cos 240° = 4\cos^3 80° - 3\cos 80°$$

よって，$-\dfrac{1}{2} = 4\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 - 3\cdot\dfrac{x}{2}$ から，$x^3 - 3x + 1 = 0$ となる。

(3)　$x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80°)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ より，$x^3 - 3x + 1 = 0$ の解を $x = 2\cos\theta$ ($0° < \theta < 180°$) とおくと, (2)より,

$$\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$$

$0° < 3\theta < 540°$ から，$3\theta = 120°$，$240°$，$480°$ となり,

$$\theta = 40°,\ 80°,\ 160°$$

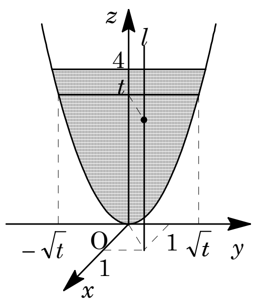
よって，$0° < \alpha < \beta < 180°$ から，$\alpha = 40°$，$\beta = 160°$ である。

[解 説]

3 倍角の公式を用いて, 3 次方程式の解を求める有名問題です。

2

問題のページへ



(1)　まず，平面図形 $D: x=0,\ \ y^2 \leqq z \leqq 4$ と平面 $z=t$ との交わり D_t は，線分となり，

$$x=0,\ -\sqrt{t} \leqq y \leqq \sqrt{t},\ z=t \cdots\cdots\cdots(*)$$

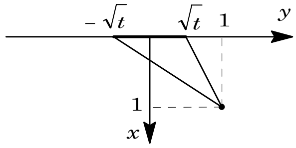
また，直線 l と平面 $z=t$ との交わりは点 $(1,\ 1,\ t)$ である。

さて，(＊)上の点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値を M，最小値を m とおくと，

(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$M=\sqrt{(1+\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2+2\sqrt{t}+t}$$

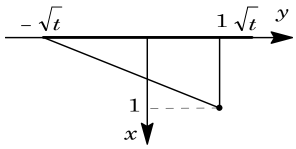
$$m=\sqrt{(1-\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2-2\sqrt{t}+t}$$



(ii)　$1 \leqq t \leqq 4$ のとき

$$M=\sqrt{(1+\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2+2\sqrt{t}+t}$$

$$m=1$$



(2)　D を l のまわりに 1 回転させてできる立体 E を，平面 $z=t$ によって切断したとき，その切り口の面積 $S(t)$ は，

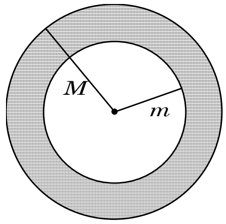
$$S(t)=\pi(M^2-m^2)$$

(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$S(t)=\pi\{(2+2\sqrt{t}+t)-(2-2\sqrt{t}+t)\}=4\pi\sqrt{t}$$

(ii)　$1 \leqq t \leqq 4$ のとき

$$S(t)=\pi\{(2+2\sqrt{t}+t)-1\}=\pi(1+2\sqrt{t}+t)$$



(3)　E の体積 V は，

$$V=\int_0^4 S(t)\,dt=4\pi\int_0^1 \sqrt{t}\,dt+\pi\int_1^4 (1+2\sqrt{t}+t)\,dt$$

$$=4\pi\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\pi\left[t+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^2\right]_1^4=\frac{8}{3}\pi+\left(3+\frac{28}{3}+\frac{15}{2}\right)\pi=\frac{45}{2}\pi$$

[解 説]

平面図形を回転したときにできる立体の体積を求めるものです。回転軸に垂直な断面がドーナツ形になるので，その外径と内径を求めるところがポイントです。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$x(f(x)-1)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ ………①

①の両辺を x で微分すると，

$$f(x)-1+xf'(x)=2e^{-x}g(x)\,,\quad e^x(f(x)-1+xf'(x))=2g(x)\ \cdots\cdots\text{②}$$

②の両辺を x で微分すると，条件から $g'(x)=e^xf(x)$ なので，

$$e^x(f(x)-1+xf'(x))+e^x(f'(x)+f'(x)+xf''(x))=2e^xf(x)$$

よって，$f(x)-1+xf'(x)+2f'(x)+xf''(x)=2f(x)$ より，

$$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1\ \cdots\cdots\text{③}$$

(2)　$f(x)$ を n 次の整式とし，x^n の係数を $a(\neq 0)$ とおく。ただし，$n\geqq 2$ とする。

すると，$f'(x)$ は $n-1$ 次，$f''(x)$ は $n-2$ 次の整式となる。

そこで，③の両辺の x^n の係数を比較すると，

$$na-a=0$$

よって，$n=1$ から不適となり，これより $f(x)$ は定数または 1 次式である。

(3)　まず，$g(x)=0$ であり，②の両辺に $x=0$ を代入すると，

$$f(0)-1=0\,,\quad f(0)=1$$

(2)の結論を合わせると，$f(x)=px+1$ とおくことができ，③より，

$$p(x+2)-(px+1)=1$$

よって，$p=1$ から，$f(x)=x+1$ となり，

$$g(x)=\int_0^x e^t(t+1)\,dt=\Big[e^t(t+1)\Big]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=e^x(x+1)-1-\Big[e^t\Big]_0^x$$

$$=e^x(x+1)-1-e^x+1=xe^x$$

[解 説]

積分方程式の問題です。(2)の設問のような，ていねいな誘導のため，見かけよりは解きやすくなっています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　k, l を整数として，$\sqrt{2}=\dfrac{l}{k}$ ($k>0$, k と l は互いに素)と仮定すると，

$$\sqrt{2}k=l,\ \ 2k^2=l^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

これより，l^2 は偶数，すなわち l は偶数である。

すると, m を整数として $l=2m$ と表せ，①に代入すると，

$$2k^2=4m^2,\ \ k^2=2m^2$$

これより，k^2 は偶数，すなわち k は偶数である。

したがって, k と l はともに偶数となり，互いに素という仮定に反する。

よって，$\sqrt{2}$ は有理数でない，すなわち無理数である。

(2)　条件より，$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(5+\sqrt{2})^{n+1}=(5+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})$

$$=(5a_n+2b_n)+(a_n+5b_n)\sqrt{2}$$

a_n，b_n は自然数，$\sqrt{2}$ は無理数より，

$$a_{n+1}=5a_n+2b_n \cdots\cdots\cdots ②,\ \ b_{n+1}=a_n+5b_n \cdots\cdots\cdots ③$$

(3)　②③を $a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$ に適用すると，

$$5a_n+2b_n+p(a_n+5b_n)=q(a_n+pb_n)$$

任意の n に対して成立することより，

$$5+p=q \cdots\cdots ④,\ \ 2+5p=pq \cdots\cdots ⑤$$

④⑤より，$2+5p=p(5+p)$，$p=\pm\sqrt{2}$

④から，$(p,\ q)=(\sqrt{2},\ 5+\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\ 5-\sqrt{2})$

(4)　条件から，$a_1=5$，$b_1=1$ である。

まず，$a_{n+1}+\sqrt{2}b_{n+1}=(5+\sqrt{2})(a_n+\sqrt{2}b_n)$ から，

$$a_n+\sqrt{2}b_n=(a_1+\sqrt{2}b_1)(5+\sqrt{2})^{n-1}=(5+\sqrt{2})^n \cdots\cdots\cdots ⑥$$

また，$a_{n+1}-\sqrt{2}b_{n+1}=(5-\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2}b_n)$ から，

$$a_n-\sqrt{2}b_n=(a_1-\sqrt{2}b_1)(5-\sqrt{2})^{n-1}=(5-\sqrt{2})^n \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥⑦より，$a_n=\dfrac{1}{2}\{(5+\sqrt{2})^n+(5-\sqrt{2})^n\}$，$b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{(5+\sqrt{2})^n-(5-\sqrt{2})^n\}$

[解 説]

連立漸化式の応用についての有名問題です。この解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

5

問題のページへ

(1) $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1 & a-2\\a-2 & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1\\a-2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1 & a-2\\a-2 & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-2\\1-a\end{pmatrix}$

よって，$\mathrm{P}_1(a-1,\ a-2)$，$\mathrm{Q}_1(a-2,\ 1-a)$から，

$$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=\sqrt{(a-1-a+2)^2+(a-2-1+a)^2}=\sqrt{4a^2-12a+10}$$

(2) Eを単位行列として，ハミルトン・ケーリーの定理から，

$$A^2+\{(a-1)(1-a)-(a-2)^2\}E=O\,,\ \ A^2=(2a^2-6a+5)E\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より, nを偶奇に分けると，帰納的に,

(i) nが偶数のとき

$$A^n=(2a^2-6a+5)^{\frac{n}{2}}E=(2a^2-6a+5)^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

(ii) nが奇数のとき

$$A^n=(2a^2-6a+5)^{\frac{n-1}{2}}A=(2a^2-6a+5)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}a-1 & a-2\\a-2 & 1-a\end{pmatrix}$$

(3) (i) nが偶数のとき

$$A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(2a^2-6a+5)^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \ A^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(2a^2-6a+5)^{\frac{n}{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{(2a^2-6a+5)^n+(2a^2-6a+5)^n}=\sqrt{2(2a^2-6a+5)^n}$

(ii) nが奇数のとき

$$A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(2a^2-6a+5)^{\frac{n-1}{2}}A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(2a^2-6a+5)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}a-1\\a-2\end{pmatrix}$$

$$A^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(2a^2-6a+5)^{\frac{n-1}{2}}A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(2a^2-6a+5)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}a-2\\1-a\end{pmatrix}$$

(1)から，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{(2a^2-6a+5)^{n-1}(4a^2-12a+10)}=\sqrt{2(2a^2-6a+5)^n}$

(i)(ii)より，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{2(2a^2-6a+5)^n}=\sqrt{2\left\{2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}^n}$

よって，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$は$a=\frac{3}{2}$のとき最小値$\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$をとる。

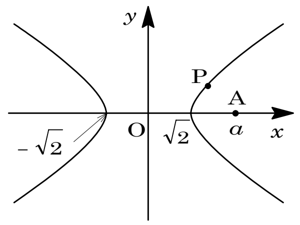
［解 説］

(2)は，誘導なしにA^nを求めさせる設問ですが，このような場合は裏があるものです。本問では，A^2が単位行列の定数倍となっています。

6

問題のページへ

(1)　$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ より，$y^2=\dfrac{x^2}{2}-1$ ……(＊)となり，



$$\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+\frac{x^2}{2}-1$$
$$=\frac{3}{2}x^2-2ax+a^2-1$$
$$=\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+\frac{1}{3}a^2-1$$

ここで, (＊)から，$\dfrac{x^2}{2}-1\geqq 0$ より，$x\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq x$

(i)　$\dfrac{2}{3}a\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq\dfrac{2}{3}a$ $\left(a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}，\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a\right)$のとき

$x=\dfrac{2}{3}a$ で AP^2 は最小となり, AP の最小値 $f(a)=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1}$

(ii)　$-\sqrt{2}<\dfrac{2}{3}a<0$ $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a<0\right)$のとき

$x=-\sqrt{2}$ で AP^2 は最小となり, AP の最小値 $f(a)=\sqrt{(-\sqrt{2}-a)^2}=|a+\sqrt{2}|$

(iii)　$0\leqq\dfrac{2}{3}a<\sqrt{2}$ $\left(0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$のとき

$x=\sqrt{2}$ で AP^2 は最小となり, AP の最小値 $f(a)=\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2}=|a-\sqrt{2}|$

(2)　曲線 $b=f(a)$ に対して, (1)より,

(i)　$a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき

曲線 $b=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1}$ は，$b^2=\dfrac{1}{3}a^2-1$ から，双曲線 $\dfrac{1}{3}a^2-b^2=1$ の上半分となる。

また，漸近線は，$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$ である。

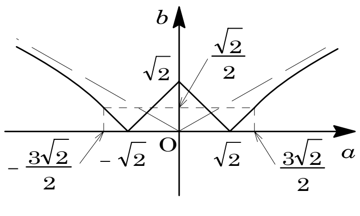
(ii)　$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a<0$ のとき

曲線 $b=|a+\sqrt{2}|$ は，折れ線 $b=|a|$ を a 軸方向に $-\sqrt{2}$ だけ平行移動したもの。

(iii)　$0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき

曲線 $b=|a-\sqrt{2}|$ は，折れ線 $b=|a|$ を a 軸方向に $\sqrt{2}$ だけ平行移動したもの。

以上より，曲線 $b=f(a)$ の概形は，右図のようになる。



[解 説]

最初に双曲線のグラフを書き, 「当たり」をつけておくとミスが防げます。