

1

問題のページへ

与えられた方程式 $\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$ から、

$$(\log_{10} p + \log_{10} x)(\log_{10} q + \log_{10} x) + 1 = 0 \dots\dots\dots$$

ここで、 $\log_{10} x = X$ 、 $\log_{10} p = P$ 、 $\log_{10} q = Q$ とおくと、より、

$$(P + X)(Q + X) + 1 = 0, \quad X^2 + (P + Q)X + PQ + 1 = 0 \dots\dots\dots$$

さて、 $x > 1$ の解をもつ条件は、 $X > 0$ の解をもつ条件に対応するので、

(i) $PQ + 1 > 0$ ($PQ > -1$) のとき

が $X > 0$ の解をもつ条件は、

$$D = (P + Q)^2 - 4(PQ + 1) \geq 0 \dots\dots, \quad -(P + Q) > 0 \dots\dots$$

$$\text{より、} (P - Q)^2 - 4 \geq 0, \quad (P - Q + 2)(P - Q - 2) \leq 0$$

$$\text{より、} Q < -P$$

(ii) $PQ + 1 = 0$ ($PQ = -1$) のとき

の解は $X = 0$ 、 $X = -(P + Q)$ となることより、 $X > 0$ の解をもつ条件は、

$$-(P + Q) > 0, \quad Q < -P$$

(iii) $PQ + 1 < 0$ ($PQ < -1$) のとき

はつねに $X > 0$ の解をもつ。

以上より、点 $(\log_{10} p, \log_{10} q)$ 、すなわち点 (P, Q)

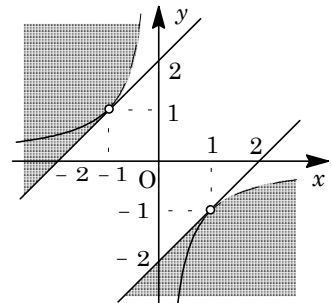
が満たす条件は、

(i) $xy > -1$ かつ $(x - y + 2)(x - y - 2) \leq 0$ かつ $y < -x$

(ii) $xy = -1$ かつ $y < -x$

(iii) $xy < -1$

この領域を図示すると、右図の網点部となる。ただし、実線の境界は領域に含み、破線の境界は領域に含まない。



[解 説]

対数の絡んだ解の配置の問題です。基本的ですが、慎重な処理が必要です。

2

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{PQ} = (\cos\theta - 1, 2 + \sin\theta, -1)$ より, 直線 PQ は, u を実数として,

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + u(\cos\theta - 1, 2 + \sin\theta, -1)$$

さて, 平面 $z = t$ と交わるのは, $1 - u = t$ より, $u = 1 - t$ のときであり, このとき,

$$x = 1 + (1 - t)(\cos\theta - 1) = (1 - \cos\theta)t + \cos\theta, \quad y = (1 - t)(2 + \sin\theta)$$

条件より, 交点を (α, β, t) とおくと,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= \{(1 - \cos\theta)t + \cos\theta\}^2 + (2 + \sin\theta)^2(1 - t)^2 \\ &= (6 + 4\sin\theta - 2\cos\theta)t^2 + (-10 - 8\sin\theta + 2\cos\theta)t + (5 + 4\sin\theta) \end{aligned}$$

(2) 線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を, 平面 $z = t$ で切断したときにできる切り口は, 中心が $(0, 0, t)$ で, 半径が $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ の円である。

その断面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t) = \pi(\alpha^2 + \beta^2)$$

よって, 求める立体の体積 V は, (1) より,

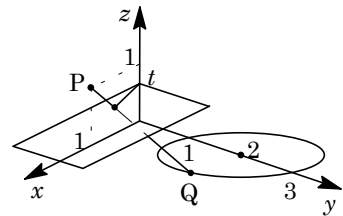
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(t) dt = \pi \int_0^1 (\alpha^2 + \beta^2) dt \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{3}(6 + 4\sin\theta - 2\cos\theta) + \frac{1}{2}(-10 - 8\sin\theta + 2\cos\theta) + (5 + 4\sin\theta) \right\} \\ &= \frac{\pi}{3}(6 + 4\sin\theta + \cos\theta) \end{aligned}$$

(3) α を $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ を満たす角と決めると, (2) より,

$$V = \frac{\pi}{3} \{ 6 + \sqrt{17} \sin(\theta + \alpha) \}$$

すると, $0 < \theta < 2\pi$ より, $-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$ となり, V の最大値は $\frac{\pi}{3}(6 + \sqrt{17})$,

最小値は $\frac{\pi}{3}(6 - \sqrt{17})$ である。



[解 説]

軸とねじれの位置にある線分を回転したときにできる曲面で囲まれた立体の体積を求める頻出問題です。ただ, 本問は計算量が多めです。

3

問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f(t) - g(t) &= \int_1^e \frac{t^2 - x^2}{t-x} \log x \, dx = \int_1^e (t+x) \log x \, dx = t \int_1^e \log x \, dx + \int_1^e x \log x \, dx \\
 &= t [x \log x - x]_1^e + \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= t \{e - (e-1)\} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = t + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = t + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 1 < x < e \text{ かつ } t > e \text{ のとき, } 0 < \frac{1}{t-x} < \frac{1}{t-e} \text{ より,}$$

$$0 < \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x} \, dx < \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-e} \, dx = \frac{1}{t-e} \int_1^e x^2 \log x \, dx$$

ここで, $\int_1^e x^2 \log x \, dx = k > 0$ とおくと, $0 < g(t) < \frac{k}{t-e}$ となる。

すると, $t \rightarrow \infty$ のとき $\frac{k}{t-e} \rightarrow 0$ なので, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ である。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (1) \text{ より, } f(t) - \frac{bt^2}{t-a} &= g(t) + t + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{bt^2}{t-a} \\
 &= g(t) + t + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} - \left(bt + ab + \frac{a^2 b}{t-a} \right) \\
 &= g(t) + (1-b)t + \frac{1}{4}(e^2 + 1) - ab - \frac{a^2 b}{t-a}
 \end{aligned}$$

$t \rightarrow \infty$ のとき, $g(t) \rightarrow 0$, $\frac{a^2 b}{t-a} \rightarrow 0$ より, $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(f(t) - \frac{bt^2}{t-a} \right)$ が有限な値となるた

めに必要な条件は,

$$1 - b = 0, \quad b = 1$$

このとき, $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(f(t) - \frac{bt^2}{t-a} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ g(t) + \frac{1}{4}(e^2 + 1) - a - \frac{a^2}{t-a} \right\} = 0$ より,

$$\frac{1}{4}(e^2 + 1) - a = 0, \quad a = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

[解 説]

(2) の k の値を計算すると, $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$ となりますが, この値は, ここでは必要ありません。

4

問題のページへ

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3b_n) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 5b_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}(3a_n + 5b_n)^2 - \frac{5}{4}(a_n + 3b_n)^2 \\ &= \frac{1}{4}(9a_n^2 + 30a_nb_n + 25b_n^2) - \frac{5}{4}(a_n^2 + 6a_nb_n + 9b_n^2) \\ &= a_n^2 - 5b_n^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a_n^2 - 5b_n^2 = a_1^2 - 5b_1^2 = 3^2 - 5 \times 1^2 = 4$$

(2) すべての自然数 n について, a_n, b_n は自然数で $a_n + b_n$ は偶数であることを, 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 = 3, \quad b_1 = 1 \text{ より, } a_1, b_1 \text{ は自然数で, } a_1 + b_1 = 4 \text{ は偶数である。}$$

(ii) $n=k$ のとき

a_k, b_k は自然数で $a_k + b_k$ は偶数であると仮定すると,

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}(3a_k + 5b_k) = (a_k + 2b_k) + \frac{1}{2}(a_k + b_k)$$

$$b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + 3b_k) = b_k + \frac{1}{2}(a_k + b_k)$$

$$a_{k+1} + b_{k+1} = \frac{1}{2}(3a_k + 5b_k) + \frac{1}{2}(a_k + 3b_k) = 2(a_k + 2b_k)$$

これより, a_{k+1}, b_{k+1} は自然数で $a_{k+1} + b_{k+1}$ は偶数である。

(i)(ii)より, a_n, b_n は自然数で $a_n + b_n$ は偶数である。

[解 説]

整数と漸化式の融合問題です。意外な感じですが, (1)と(2)の間に直接的な関係はありません。

5

問題のページへ

$$(1) AP = PD \text{ より, } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ となり,}$$

$$1 - 2a = x \dots\dots\dots, \quad -a - 2 = -ay \dots\dots\dots$$

$$-2 + a = ax \dots\dots\dots, \quad 2a + 1 = y \dots\dots\dots$$

より, $-2 + a = a(1 - 2a)$ となり, $a^2 = 1$ である。

$a > 0$ から $a = 1$ となり, より $x = -1$

より, $y = 3$ となり, この値は を満たす。

$$(2) AP = PD, (tE)P = P(tE) \text{ より, } (A + tE)P = P(D + tE) \dots\dots\dots$$

$$(1) \text{ より, } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ から, } \det P = 2 \text{ となるので } P^{-1} \text{ は存在し, より,}$$

$$A + tE = P(D + tE)P^{-1}$$

$$\text{よって, } (A + tE)^n = P(D + tE)P^{-1} \cdot P(D + tE)P^{-1} \dots\dots P(D + tE)P^{-1}$$

$$= P(D + tE)^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+t & 0 \\ 0 & 3+t \end{pmatrix}^n \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1+t)^n & 0 \\ 0 & (3+t)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1+t)^n + (3+t)^n & (-1+t)^n - (3+t)^n \\ (-1+t)^n - (3+t)^n & (-1+t)^n + (3+t)^n \end{pmatrix}$$

条件より, $(A + tE)^n = 4E$ なので,

$$(-1+t)^n + (3+t)^n = 8 \dots\dots\dots, \quad (-1+t)^n - (3+t)^n = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } (-1+t)^n = (3+t)^n = 4 \dots\dots\dots$$

すると, $-1+t < 3+t$ から, を満たす実数 t と自然数 n が存在するためには, $-1+t = -(3+t)$ かつ n が偶数であることが必要である。

よって, $t = -1$ となり, から $n = 2$ である。

[解 説]

(1)は, 対角行列を用いた n 乗計算という(2)への誘導です。ただ, この結果をどのように利用するかについて, ひとひねりがあります。

6

問題のページへ

- (1) $C: y = x^2$ に対し, $y' = 2x$ より, $P(t, t^2)$ における接線の方程式は,

$$y - t^2 = 2t(x - t), \quad y = 2tx - t^2 \dots\dots\dots$$

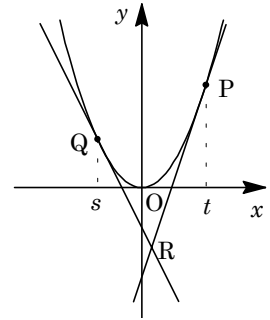
同様に, $Q(s, s^2)$ における接線の方程式は,

$$y = 2sx - s^2 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } 2tx - t^2 = 2sx - s^2, \quad 2(t-s)x = t^2 - s^2$$

$$s < t \text{ より } x = \frac{t+s}{2} \text{ となり, から } y = 2t \cdot \frac{t+s}{2} - t^2 = ts$$

$$\text{の交点は } R(X, Y) \text{ より, } X = \frac{t+s}{2}, \quad Y = ts \dots\dots\dots$$



- (2) (1)より, $\overrightarrow{RP} = \frac{t-s}{2}(1, 2t)$, $\overrightarrow{RQ} = \frac{t-s}{2}(-1, -2s)$ となり, 条件より, この 2 つのベクトルのなす角が $\frac{\pi}{4}$ なので,

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}}{|\overrightarrow{RP}| |\overrightarrow{RQ}|}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1-4ts}{\sqrt{1+4t^2} \sqrt{1+4s^2}}$$

$-1-4st > 0$ ($4st < -1$) のもとで, 両辺を 2 乗すると,

$$2(-1-4ts)^2 = (1+4t^2)(1+4s^2), \quad 16t^2s^2 - 4(t^2 + s^2) + 16ts + 1 = 0$$

$$\text{変形して, } 16t^2s^2 - 4(t+s)^2 + 24ts + 1 = 0$$

$$\text{を代入すると, } 16Y^2 - 16X^2 + 24Y + 1 = 0$$

$$16\left(Y + \frac{3}{4}\right)^2 - 16X^2 = 8, \quad 2X^2 - 2\left(Y + \frac{3}{4}\right)^2 = -1$$

よって, $R(X, Y)$ は双曲線上を動き, その方程式は $2x^2 - 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = -1$ である。

[解 説]

2 接線のなす角の扱いについては, 内積を利用しています。tan の加法定理を用いても可能です。なお, 題意が双曲線の方程式を求めるだけということなので, (2)の記述はアバウトです。s, t の実数条件や $4st < -1$ を加味すると, R の軌跡は双曲線の下側の枝となります。