

1

解答解説のページへ

$p, q$  を正の実数とする。 $x$  の方程式  $\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$  が 1 より大きい解をもつとき、点  $(\log_{10} p, \log_{10} q)$  の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

$xyz$  空間内の点  $P(1, 0, 1)$  と,  $xy$  平面上の円  $C: x^2 + (y-2)^2 = 1$  に属する点  $Q(\cos\theta, 2+\sin\theta, 0)$  を考える。

- (1) 直線  $PQ$  と平面  $z=t$  の交点の座標を  $(\alpha, \beta, t)$  とするとき,  $\alpha^2 + \beta^2$  を  $t$  と  $\theta$  で表せ。
- (2) 線分  $PQ$  を  $z$  軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面  $z=0, z=1$  によって囲まれる立体の体積を  $\theta$  で表せ。
- (3)  $Q$  が  $C$  上を 1 周するとき, (2) で求めた体積の最大値, 最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$e$  は自然対数の底とする。  $t > e$  において関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  を次のように定める。

$$f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t-x} dx, \quad g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x} dx$$

- (1)  $f(t) - g(t)$  を  $t$  の 1 次式で表せ。
- (2)  $1 < x < e$  かつ  $t > e$  のとき  $\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t-e}$  が成り立つことを用いて、 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  を示せ。
- (3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( f(t) - \frac{bt^2}{t-a} \right) = 0$  となる定数  $a, b$  を求めよ。

4

解答解説のページへ

2つの数列 $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$a_1 = 3, b_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n), b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3b_n)$$

- (1) すべての自然数  $n$  について,  $a_n^2 - 5b_n^2 = 4$ であることを示せ。
- (2) すべての自然数  $n$  について,  $a_n, b_n$  は自然数かつ  $a_n + b_n$  は偶数であることを証明せよ。

5

解答解説のページへ

行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $P = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$  とする。  $AP = PD$  が成り立つとき、 $a, x, y$  を求めよ。

ただし、 $a > 0$  とする。

- (2)  $(A + tE)^n = 4E$  が成り立つような実数  $t$  と自然数  $n$  の組をすべて求めよ。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする。

6

解答解説のページへ

放物線  $C: y = x^2$  上の異なる 2 点  $P(t, t^2)$ ,  $Q(s, s^2)$  ( $s < t$ ) における接線の交点を  $R(X, Y)$  とする。

- (1)  $X, Y$  を  $t, s$  を用いて表せ。
- (2) 点  $P, Q$  が  $\angle PRQ = \frac{\pi}{4}$  を満たしながら  $C$  上を動くとき、点  $R$  は双曲線上を動くことを示し、かつ、その双曲線の方程式を求めよ。