1　問題のページへ

(1)　AP : OP $= m : 1$ より，$\mathrm{AP} = m\mathrm{OP}$ すなわち $\mathrm{AP}^2 = m^2\mathrm{OP}^2$ となり，

$$(x-1)^2 + y^2 = m^2(x^2+y^2),\ (m^2-1)x^2 + (m^2-1)y^2 + 2x - 1 = 0$$

$m > 1$ より，$x^2 + y^2 + \dfrac{2}{m^2-1}x - \dfrac{1}{m^2-1} = 0$

$$\left(x + \frac{1}{m^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m}{m^2-1}\right)^2 \cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，点 P の軌跡は，中心 $\left(-\dfrac{1}{m^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{m}{m^2-1}$ の円である。

(2)　$\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通る直線 l を，$x = 1$ または $y = a(x-1)$（a は実数）とおく。

(i)　$l : x = 1$ のとき

円$(*)$の中心と直線の距離は，$1 + \dfrac{1}{m^2-1} = \dfrac{m^2}{m^2-1}$ となるが, $m > 1$ より，

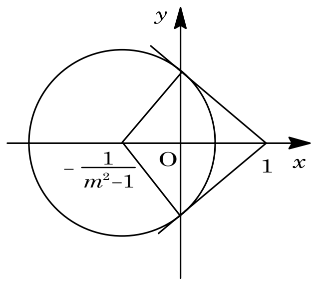
$$\frac{m^2}{m^2-1} > \frac{m}{m^2-1}$$

よって，直線 $x = 1$ と円$(*)$の共有点はない。

(ii)　$l : y = a(x-1)$ のとき

条件から，円$(*)$の中心と直線 $ax - y - a = 0$ の距離が，半径に等しいことより，

$$\frac{\left|-\dfrac{a}{m^2-1} - a\right|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{m}{m^2-1},\quad \frac{m|a|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$$



よって，$m^2a^2 = a^2 + 1$ から，$a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}$ となり，

$$l : y = \pm\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}(x-1)$$

さて，直線 l の法線方向の単位ベクトル $\vec{n}$ の成分は，

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a,\ -1) = \frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{m^2-1}},\ -1\right) = \pm\left(\frac{1}{m},\ \mp\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\right)$$

以上より，接点の座標 $(x,\ y)$ は，右上図より，

$$(x,\ y) = \left(-\frac{1}{m^2-1},\ 0\right) + \frac{m}{m^2-1}\left(\frac{1}{m},\ \mp\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\right) = \left(0,\ \mp\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}\right)$$

[解 説]

接点の座標を求めるときに，少し工夫をし，単位ベクトルを利用して計算量を減らしています。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=b+\dfrac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}$ に対して，$f(x)\geqq 0$ とすると，

$$b+\frac{1}{b}\geqq e^{ax}+\frac{1}{e^{ax}},\quad e^{2ax}-\left(b+\frac{1}{b}\right)e^{ax}+1\leqq 0$$

すると，$(e^{ax}-b)\left(e^{ax}-\dfrac{1}{b}\right)\leqq 0$ となり, $b>1$ から,

$$\frac{1}{b}\leqq e^{ax}\leqq b,\quad -\frac{1}{a}\log b\leqq x\leqq\frac{1}{a}\log b$$

(2)　$f(-x)=b+\dfrac{1}{b}-e^{-ax}-e^{ax}=f(x)$ より，曲線 $y=\sqrt{f(x)}$ は y 軸対称である。

すると，この曲線と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V は,

$$V=2\pi\int_0^{\frac{1}{a}\log b}f(x)\,dx=2\pi\left[\left(b+\frac{1}{b}\right)x-\frac{1}{a}e^{ax}+\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{\frac{1}{a}\log b}$$

$$=2\pi\left\{\left(b+\frac{1}{b}\right)\frac{1}{a}\log b-\frac{1}{a}(e^{\log b}-1)+\frac{1}{a}(e^{-\log b}-1)\right\}$$

$$=2\pi\left\{\frac{b^2+1}{b}\cdot\frac{\log b}{a}-\frac{1}{a}(b-1)+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{2\pi}{ab}\left\{(b^2+1)\log b-b^2+1\right\}$$

(3)　$a=b\log b$ のとき, (2)より,

$$V(b)=\frac{2\pi}{b^2\log b}\left\{(b^2+1)\log b-b^2+1\right\}=2\pi\left(\frac{b^2+1}{b^2}-\frac{b^2-1}{b^2}\cdot\frac{1}{\log b}\right)$$

よって，$\displaystyle\lim_{b\to\infty}V(b)=2\pi\lim_{b\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{b^2}\right)-\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\frac{1}{\log b}\right\}=2\pi$

[解 説]

微積分の基本レベルの総合問題です。

3

問題のページへ

(1)　$I=\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1+\cos 2x)\,dx$ とおく。

ここで，$\int_0^{\pi} x^2\,dx=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\dfrac{\pi^3}{3}$

$$\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\Big[x^2\sin 2x\Big]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2x\sin 2x\,dx=-\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[x\cos 2x\Big]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\Big[\sin 2x\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

よって，$I=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{4}$

(2)　$J=\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx$ とおくと，$f(x)=ax\sin x+x+\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$J=\int_0^{\pi}(a\sin x+ax\cos x+1)^2dx$$
$$=\int_0^{\pi}(a^2\sin^2x+a^2x^2\cos^2x+1+2a^2x\sin x\cos x+2ax\cos x+2a\sin x)\,dx$$

ここで，$\int_0^{\pi}(a^2\sin^2x+2a^2x\sin x\cos x)\,dx=a^2\Big[x\sin^2x\Big]_0^{\pi}=0$

$$\int_0^{\pi}(2ax\cos x+2a\sin x)\,dx=2a\Big[x\sin x\Big]_0^{\pi}=0$$

よって, (1)より，$J=\int_0^{\pi}(a^2x^2\cos^2x+1)\,dx=a^2\left(\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{4}\right)+\pi$

また，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}a+\pi$ から，$\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx\geqq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$を満たす a の範囲は,

$$a^2\left(\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\pi\geqq\frac{\pi}{2}a+\pi,\quad a\{(2\pi^2+3)a-6\}\geqq 0$$

以上より, $a\leqq 0$,　$\dfrac{6}{2\pi^2+3}\leqq a$

[解 説]

定積分の計算問題です。(2)は，そのまま計算してもよいのですが，何か裏があるとみるのが常識的です。

4

問題のページへ

(1)　$a_n = an^3 + bn^2 + cn$ に対して，$n^2 = a_{n+1} - a_n$ より，

$$n^2 = a\{(n+1)^3 - n^3\} + b\{(n+1)^2 - n^2\} + c\{(n+1) - n\}$$

$$3an^2 + (3a+2b)n + (a+b+c) = n^2$$

どんな n に対しても成立する条件は,

$$3a = 1,\ 3a + 2b = 0,\ a + b + c = 0$$

よって，$a = \frac{1}{3}$，$b = -\frac{1}{2}$，$c = \frac{1}{6}$

(2)　(1)より，$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$ となり，$a_1 = a + b + c = 0$ から,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\{2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\} = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3)　1, 2, $\cdots$, n の相異なる 2 数の積のすべての和 $S(n)$ は,

$$S(n) = \frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots+n)^2 - (1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1) - 2(2n+1)\} = \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)$$

$$= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

[解 説]

数列の和の公式を証明する基本問題です。また, (3)は有名問題です。

5

問題のページへ

(1) 条件より，$P\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\1+b\end{pmatrix}$，$P\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\1-b\end{pmatrix}$となり，

$$P\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-a\\1+b&1-b\end{pmatrix}$$

$a\neq 0$より，$\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}^{-1}$は存在するので，

$$P=\begin{pmatrix}a&-a\\1+b&1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a\\1&b\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-a}\begin{pmatrix}a&-a\\1+b&1-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b&-a\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}-ab-a&a^2\\-b^2-2b+1&a+ab\end{pmatrix}$$

すると，$\det P=\dfrac{1}{a^2}\{-(ab+a)^2-a^2(-b^2-2b+1)\}=-2$より，$P^{-1}$は存在する。

(2) $PA=A+B$，$PB=A-B$より，

$$A=P^{-1}A+P^{-1}B\cdots\cdots\cdots①,\quad B=P^{-1}A-P^{-1}B\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$2P^{-1}B=A-B$

ここで，条件より，$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=P^{-1}B$なので，$2\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a\\1-b\end{pmatrix}$となり，

$$a=-2s\cdots\cdots\cdots③,\quad b=1-2t\cdots\cdots\cdots④$$

さて，点$(a,\ b)$が放物線$x=y^2+2\ \ (|y|\leqq 1)$上を動くことより，

$$a=b^2+2\ \ (|b|\leqq 1)$$

③④を代入すると，$-2s=(1-2t)^2+2\ \ (|1-2t|\leqq 1)$となり，

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}(s+1)\ \ (0\leqq t\leqq 1)$$

よって，点$(s,\ t)$の軌跡は，放物線$\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{1}{2}(x+1)\ \ (0\leqq y\leqq 1)$である。

[解 説]

③④式を導く部分は工夫をしていますが，行列 P の成分で計算をしても，少々時間がかかるだけです。

6

問題のページへ

(1)　$C: x^2+ay^2+by=0$ ……①，$L: y=2x-1$ ……②が接することより，

$x^2+a(2x-1)^2+b(2x-1)=0$，$(4a+1)x^2-2(2a-b)x+a-b=0$ ……③

$4a+1\neq 0$ から，$D/4=(2a-b)^2-(4a+1)(a-b)=0$ となり，

$b^2+b-a=0$

(2)　(1)から，$a=b^2+b\neq -\frac{1}{4}$ より，$\left(b+\frac{1}{2}\right)^2\neq 0$ すなわち $b\neq -\frac{1}{2}$ のもとで，

$C: x^2+(b^2+b)y^2+by=0$ ………④

(i)　$b^2+b=0$ $(b=0,\ -1)$ のとき

$b=0$ のとき④は $x=0$，$b=-1$ のとき④は $y=x^2$ となる。

(ii)　$b^2+b\neq 0$ $(b\neq 0,\ b\neq -1)$ のとき

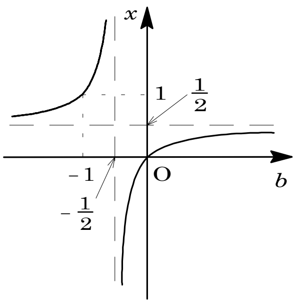
④より，$x^2+(b^2+b)\left(y^2+\frac{1}{b+1}y\right)=0$

$x^2+(b^2+b)\left(y+\frac{1}{2b+2}\right)^2=\frac{b}{4b+4}$

よって，$b^2+b>0$ $(b<-1,\ 0<b)$ のとき $\frac{b}{4b+4}>0$ となり楕円を表し，また，$b^2+b<0$ $(-1<b<0)$ のとき双曲線を表す。

以上より，2 次曲線 C は $b<-1,\ 0<b$ のとき楕円，$-1<b<-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<b<0$ のとき双曲線，$b=-1$ のとき放物線となる。

(3)　接点 P の x 座標は，③より，



$x=\frac{2a-b}{4a+1}=\frac{2(b^2+b)-b}{4(b^2+b)+1}=\frac{b(2b+1)}{(2b+1)^2}$

$=\frac{b}{2b+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2b+1)}$

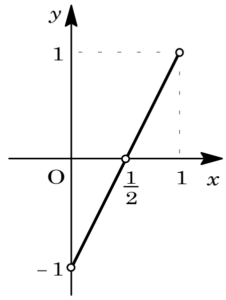
C は $b<-1,\ 0<b$ のとき楕円となるので，

$0<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$

よって，接点 P の存在範囲は，

$y=2x-1\left(0<x<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x<1\right)$

これを図示すると，右図の太線部となる。ただし，白丸は含まない。



[解 説]

計算量はやや多めですが, 2 次曲線の標準的な問題です。