

1

解答解説のページへ

$xy$  平面上に 2 定点  $A(1, 0)$  と  $O(0, 0)$  をとる。また、 $m$  を 1 より大きい実数とする。

- (1)  $AP : OP = m : 1$  を満たす点  $P(x, y)$  の軌跡を求めよ。
- (2) 点  $A$  を通る直線で、(1) で求めた軌跡との共有点が 1 個のものを求めよ。また、その共有点の座標も求めよ。

2

解答解説のページへ

関数  $f(x) = b + \frac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax}$  について、以下の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$ ,  $b > 1$

とする。

- (1)  $f(x) = 0$  を満たす  $x$  の範囲を求めよ。
- (2) 曲線  $y = \sqrt{f(x)}$  と  $x$  軸で囲まれた図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積  $V$  を求めよ。
- (3)  $a = b \log b$  のとき、(2) で求めた体積  $V$  を  $V(b)$  と表す。このとき、 $\lim_{b \rightarrow \infty} V(b) = 2\pi$  となることを示せ。

3

解答解説のページへ

(1)  $\int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x dx$  を求めよ。

(2) 定数  $a$  に対して、 $f(x) = ax \sin x + x + \frac{\pi}{2}$  とおく。このとき、不等式

$$\int_0^{\pi} \{f'(x)\}^2 dx \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす  $a$  の範囲を求めよ。ただし、 $f'(x)$  は  $f(x)$  の導関数とする。

4

解答解説のページへ

- (1) 一般項  $a_n$  が  $an^3 + bn^2 + cn$  で表される数列  $\{a_n\}$  において、

$$n^2 = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つように、定数  $a, b, c$  を定めよ。

- (2) (1)の結果を用いて、 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  となることを示せ。

- (3)  $1, 2, \dots, n$  の相異なる 2 数の積のすべての和を  $S(n)$  とする。たとえば、 $S(3) = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3 = 11$  である。 $S(n)$  を  $n$  の 4 次式で表せ。

5

解答解説のページへ

$a \neq 0$  とする。  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  に対して, 2 次正方行列  $P$  が

$$PA = A + B, \quad PB = A - B$$

を満たしている。

(1)  $a$  と  $b$  を用いて  $P$  を表し,  $P$  が逆行列  $P^{-1}$  をもつことを示せ。

(2)  $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = P^{-1}B$  とおく。  $xy$  平面において, 点  $(a, b)$  が放物線  $x = y^2 + 2$  上を動くとき, 点  $(s, t)$  の軌跡を求めよ。ただし,  $|y| \leq 1$  とする。

6

解答解説のページへ

$xy$  平面上で、2 次曲線  $C : x^2 + ay^2 + by = 0$  が直線  $L : y = 2x - 1$  に点  $P$  で接している。ただし、 $a \neq -\frac{1}{4}$  とする。

- (1)  $a$  と  $b$  の関係式を求めよ。
- (2)  $C$  が楕円、放物線、双曲線となるそれぞれの場合に、 $b$  の値の範囲を求めよ。
- (3)  $C$  が楕円となる場合の接点  $P$  の存在範囲を求め、 $xy$  平面上に図示せよ。