$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$(x^2+t)^2-f(x)=(px+q)^2$ より,

$$(2t-2)x^2+4x+t^2-8=p^2x^2+2pqx+q^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

①が x の恒等式となることより,

$$2t-2=p^2 \cdots\cdots ②,\ 4=2pq \cdots\cdots ③,\ t^2-8=q^2 \cdots\cdots ④$$

p, q は整数なので, ③より $p=2$, $q=1$ とすると, $t=3$ で②④は満たされる。

よって, ①が恒等式となる 1 組の整数値は, $(t,\ p,\ q)=(3,\ 2,\ 1)$

(2)　(1)より, $f(x)=(x^2+3)^2-(2x+1)^2$ なので, 方程式 $f(x)=0$ は,

$$(x^2+3)^2-(2x+1)^2=0,\ (x^2+3+2x+1)(x^2+3-2x-1)=0$$

$$(x^2+2x+4)(x^2-2x+2)=0$$

よって, $f(x)=0$ の解は, $x=-1\pm\sqrt{3}i$, $x=1\pm i$ である。

[解 説]

4 次方程式を誘導つきで解く問題です。(1)では, 1 組の解を求めればよいので, すべての場合をチェックしたわけではありません。

2

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ において，$f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと，$f'(x) = e^x - 1 \geqq 0$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq f(0) = 0$ となり，$e^x - (1+x) \geqq 0$ ………①

また, $x \geqq 0$ において，$g(x) = \dfrac{x^2e^x}{2} - e^x + (1+x)$ とおくと,

$$g'(x) = \frac{2xe^x + x^2e^x}{2} - e^x + 1 = \frac{(x^2+2x-2)e^x}{2} + 1$$

$$g''(x) = \frac{(2x+2)e^x + (x^2+2x-2)e^x}{2} = \frac{(x^2+4x)e^x}{2} \geqq 0$$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$g'(x) \geqq g'(0) = 0$ より,

$$g(x) \geqq g(0) = 0, \quad \frac{x^2e^x}{2} \geqq e^x - (1+x) \text{ ………②}$$

①②より, $x \geqq 0$ のとき，$0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2e^x}{2}$

(2)　(i)　$a > b > 0$ のとき

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}$$
$$< a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

よって，$a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1}$

(ii)　$a = b > 0$ のとき　$a^n - b^n = n(a-b)a^{n-1} = 0$

(i)(ii)より, $a \geqq b > 0$ のとき，$a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$ ………③

(3)　$x \geqq 0$ のとき, ①より，$e^{\frac{x}{n}} \geqq 1 + \dfrac{x}{n} > 0$ となるので, ③より,

$$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right)\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n-1}$$

$$e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x} \text{ ………④}$$

②より，$e^{\frac{x}{n}} - 1 - \dfrac{x}{n} \leqq \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 e^{\frac{x}{n}}}{2} = \dfrac{x^2e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}$ となるので,

$$n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x} \leqq n \cdot \frac{x^2e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}e^{\frac{n-1}{n}x} = \frac{x^2e^x}{2n} \text{ ………⑤}$$

④⑤より, $x \geqq 0$ のとき，$e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2e^x}{2n}$

[解 説]

(1)と(2)の不等式が，(3)の不等式を証明するための親切な誘導となっています。そっけない感じのする問題文ですが，内容には味わいがあります。

3

問題のページへ

(1)　条件より，立体 $R:|x|\leqq z^2$ ………①

l を中心軸とする半径 1 の円柱 C の方程式は,

$C:y^2+(z-1)^2\leqq 1$ ………②

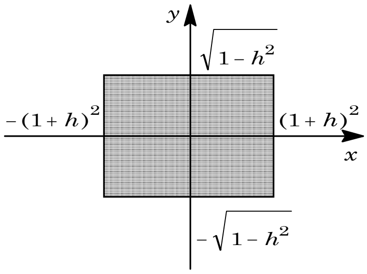
また，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面の方程式は,

$z=1+h$ ………③

③を①に代入して，$|x|\leqq(1+h)^2$，$-(1+h)^2\leqq x\leqq(1+h)^2$

③を②に代入して，$y^2+h^2\leqq 1$，$-\sqrt{1-h^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-h^2}$

R と C の共通部分 T を平面③で切断したときの切り口を図示すると，右図の網点部となる。その面積 $S(h)$ は,



$$S(h)=2(1+h)^2\cdot 2\sqrt{1-h^2}$$
$$=4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}$$

(2)　T の体積を V とすると,

$$V=\int_{-1}^{1}S(h)\,dh=\int_{-1}^{1}4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$=4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh+8\int_{-1}^{1}h\sqrt{1-h^2}\,dh+4\int_{-1}^{1}h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$=8\int_{0}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh+8\int_{0}^{1}h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$

ここで，原点が中心で，半径 1 の四分円の面積は $\dfrac{\pi}{4}$ より,

$$\int_{0}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh=\frac{\pi}{4}$$

また，$h=\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$\int_{0}^{1}h^2\sqrt{1-h^2}\,dh=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$$

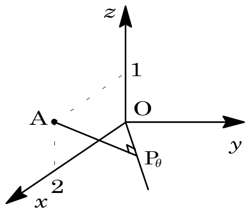
以上より，$V=8\times\dfrac{\pi}{4}+8\times\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{5}{2}\pi$ である。

[解 説]

10 年以上も前，旧旧課程の頃に頻出していた共通部分の体積を求める問題です。ここ数年は，空間図形の内容が削減されたため，散見される程度でしたが，やや風向きが変わってきたのでしょうか。

4

問題のページへ



(1)　t を実数とし，$\vec{u}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ とおくと，

$$L_\theta:(x,\ y,\ z)=t\vec{u}=t(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$

これより，L_θ 上の点 P_θ は，$P_\theta(t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 0)$ とおくことができる。

ここで，$A(2,\ 0,\ 1)$ から，

$$\overrightarrow{AP_\theta}=(t\cos\theta-2,\ t\sin\theta,\ -1)$$

条件より，AP_θ と L_θ は直交するので，$\overrightarrow{AP_\theta}\cdot\vec{u}=0$

$$\cos\theta(t\cos\theta-2)+t\sin^2\theta=0,\ t=2\cos\theta$$

よって，$P_\theta(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)$ と表せる。

さて，$P_\theta(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$x=2\cos^2\theta,\ y=2\sin\theta\cos\theta,\ z=0$$

すると，$x=1+\cos2\theta$，$y=\sin2\theta$ から，点 P_θ の描く円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2=1,\ z=0$$

すなわち, xy 平面上で，中心$(1,\ 0,\ 0)$，半径 1 の円を描く。

(2)　$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{OP_\theta}=(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)$ より，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_\theta}=4\cos^2\theta,\ |\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OP_\theta}|=\sqrt{4\cos^4\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=2\cos\theta$$

ここで，$\triangle OAP_\theta$ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP_\theta}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_\theta})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot4\cos^2\theta-16\cos^4\theta}$$

$$=\sqrt{5\cos^2\theta-4\cos^4\theta}=\sqrt{-4\left(\cos^2\theta-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{25}{16}}$$

すると，$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ のとき，S は最大値 $\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$ をとる。このとき，P_θ の座標は，$x=2\times\frac{5}{8}$，$y=2\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}$ から，

$$P_\theta\left(\frac{5}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$$

[解 説]

(2)では，有名な三角形の面積公式を利用しています。2 問続けて，空間図形の問題です。

5

問題のページへ

(1)　$A+B$ と AA は定義されない。AB と BA については，以下のようになる。

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2\\4&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-3&4\\7&-11&-2\\2&4&3\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}3&1&2\\4&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\12&-1\end{pmatrix}$$

(2)　$C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$とおくと，条件より $C(BA)=(BA)C$ なので，

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&8\\12&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8\\12&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$4a+12b=4a+8c$ ………①，$8a-b=4b+8d$ ………②

$4c+12d=12a-c$ ………③，$8c-d=12b-d$ ………④

①より $3b=2c$ ……⑤，②より $8a-5b-8d=0$ ……⑥となる。

③は⑤⑥から導け，④は⑤と一致する。

よって，⑤⑥から，$c=\dfrac{3}{2}b$，$d=a-\dfrac{5}{8}b$ となり，

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\\frac{3}{2}b&a-\frac{5}{8}b\end{pmatrix}=\left(a-\frac{b}{2}\right)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{b}{8}\begin{pmatrix}4&8\\12&-1\end{pmatrix}$$

以上より，$C=sE+t(BA)$ となる実数 $s,\ t$ が存在する。

[解 説]

行列の積に関する基本問題です。なお，(2)の結果は，よく知られている事実です。

6

問題のページへ

(1)　条件から，$x-2=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$……①，$y=t-\dfrac{1}{t}$……②なので，

$$x-2+2y=4t\ \cdots\cdots\cdots③,\quad x-2-2y=\frac{4}{t}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(x-2+2y)(x-2-2y)=16$

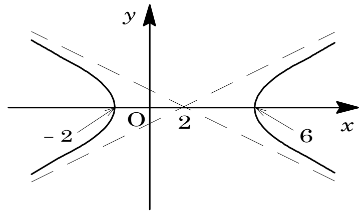
$$(x-2)^2-4y^2=16,\quad \frac{(x-2)^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで, t が 0 以外の任意の値をとるとき，$t+\dfrac{1}{t}\leqq -2$，$2\leqq t+\dfrac{1}{t}$ から，①より，

$$x\leqq -2,\quad 6\leqq x$$

また，②より y はすべての実数値をとりうる。

以上より，曲線 C は⑤で表される双曲線全体となり，その概形は右図のようになる。なお，双曲線の漸近線は，$y=\pm\dfrac{1}{2}(x-2)$ である。



(2)　点 $(a,\ 0)$ を通り，傾き m の接線は，$y=m(x-a)$………⑥

⑤⑥より，$(x-2)^2-4m^2(x-a)^2=16$

$$(1-4m^2)x^2+(-4+8am^2)x-(4a^2m^2+12)=0$$

$1-4m^2\neq 0\left(m\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$のもとで，$D/4=0$ より，

$$(-2+4am^2)^2+(1-4m^2)(4a^2m^2+12)=0,\quad (a^2-4a-12)m^2+4=0$$

この式を満たす $\pm\dfrac{1}{2}$ でない m が存在する条件は,

$$a^2-4a-12<0,\quad \frac{1}{4}(a^2-4a-12)+4\neq 0$$

よって，$-2<a<6$ かつ $a\neq 2$ となる。

このとき，$m=\pm\sqrt{\dfrac{-4}{a^2-4a-12}}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{-a^2+4a+12}}$

なお, x 軸に垂直な接線は，$x=6\ (a=6)$，$x=-2\ (a=-2)$ である。

以上より，接線の存在する a の値の範囲は，$-2\leqq a<2$，$2<a\leqq 6$ であり，接線の方程式は，$-2<a<2$，$2<a<6$ のとき,

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{-a^2+4a+12}}(x-a)$$

また，$a=6$ のとき $x=6$，$a=-2$ のとき $x=-2$ である。

[解 説]

双曲線のパラメータ表示の問題です。なお，曲線 C が双曲線の全体になることについては，簡単に触れるに留めました。