1

問題のページへ

条件より，$f(x)=ax+\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt\right)^4$ なので，$c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，

$$f(x)=ax+\frac{1}{4}c^4$$

すると，$c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(at+\frac{1}{4}c^4\right)\sin t\,dt=\left[-\left(at+\frac{1}{4}c^4\right)\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\,dt$

$$=\frac{1}{4}c^4+a\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}c^4+a$$

よって，$c-\frac{1}{4}c^4=a$ ………(＊)

ここで，$g(c)=c-\frac{1}{4}c^4$ とおくと，

$$g'(c)=1-c^3=-(c-1)(c^2+c+1)$$

c	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(c)$	$+$	0	$-$
$g(c)$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$

$\lim\limits_{c\to\infty}g(c)=\lim\limits_{c\to-\infty}g(c)=-\infty$ より，(＊)を満たす c^4 がただ1つ存在するのは，次の2つの場合がある。

(i)　c がただ1つ存在するとき

$g(c)$ の増減より，$a=\frac{3}{4}$

(ii)　絶対値が等しく，符号の異なる2つの c が存在するとき

$\alpha\neq0$ として，$g(-\alpha)=g(\alpha)$ とおくと，

$$-\alpha-\frac{1}{4}\alpha^4=\alpha-\frac{1}{4}\alpha^4$$

よって，$\alpha=0$ となり，不適である。

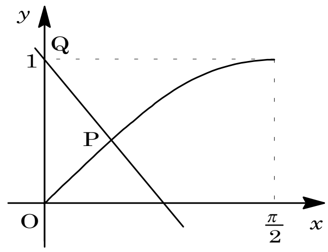
(i)(ii)より，$a=\frac{3}{4}$

[解 説]

(ii)の場合を忘れがちですが，c^4 という設定は，この場合の検討を要求しているように思われます。

2

問題のページへ



(1)　$C: y=\sin x$ に対して，$y'=\cos x$ なので，

$\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における法線の方程式は，

$$y-\sin t=-\frac{1}{\cos t}(x-t)$$

$\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通ることより，$1-\sin t=-\dfrac{1}{\cos t}(-t)$

$$\cos t(1-\sin t)-t=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(t)=\cos t(1-\sin t)-t$ とおくと，

$$f'(t)=-\sin t(1-\sin t)-\cos^2 t-1$$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\sin t<1$ なので $f'(t)<0$ となる。

これより，$f(t)$ は単調減少し，$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ から $f(t)=0$ はただ 1 つの解をもち，法線が点 Q を通るような点 P はただ 1 つ存在する。

(2)　直線 l，曲線 C，y 軸で囲まれる部分の面積を S_3 とおくと，

$$S_1+S_3=\frac{\pi}{2}\times 1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1\cdots\cdots\cdots①$$

また，(*)の解を $t=\alpha$ とおくと，$\mathrm{P}(\alpha,\ \sin\alpha)$ から，

$$l: y-\sin\alpha=-\frac{1}{\cos\alpha}(x-\alpha)$$

x 軸との交点は，$-\sin\alpha=-\dfrac{1}{\cos\alpha}(x-\alpha)$ より，$x=\sin\alpha\cos\alpha+\alpha$ となり，

$$S_2+S_3=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)\times 1=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$S_2-S_1=\dfrac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)-\dfrac{\pi}{2}+1$

ここで，(*)から，$\cos\alpha(1-\sin\alpha)-\alpha=0$，$\sin\alpha\cos\alpha+\alpha=\cos\alpha$ なので，

$$S_2-S_1=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\pi}{2}+1=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\pi+2)<0$$

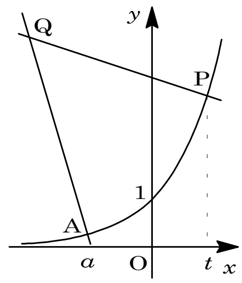
よって，$S_1>S_2$ である。

[解　説]

点 P の座標は求まりませんが，このことは P の x 座標である α の条件として回避できます。その条件を，面積の大小関係の決定につなぐわけです。

3

問題のページへ



(1)　$C : y = e^x$ より，$y' = e^x$

$\mathrm{A}(a,\ e^a)$ における法線の方程式は,

$$y - e^a = -\frac{1}{e^a}(x-a) \cdots\cdots\cdots ①$$

$\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における法線の方程式は,

$$y - e^t = -\frac{1}{e^t}(x-t) \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$y - e^a + e^a - e^t = -\dfrac{1}{e^t}(x - a + a - t)$

①を代入すると，$-\dfrac{1}{e^a}(x-a) + \dfrac{1}{e^t}(x-a) = e^t - e^a + \dfrac{1}{e^t}(t-a)$

$$x - a = -e^a e^t - e^a \frac{t-a}{e^t - e^a}$$

さて，条件より，$L_a(t) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-e^a)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + \dfrac{1}{e^{2a}}(x-a)^2}$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2a}}}\,|x-a|$$

ここで，$\displaystyle\lim_{t\to a}|x-a| = \lim_{t\to a}\left(e^a e^t + e^a \frac{t-a}{e^t - e^a}\right) = (e^a)^2 + e^a \cdot \frac{1}{e^a} = e^{2a} + 1$ から，

$$r(a) = \lim_{t\to a} L_a(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2a}}}\,(e^{2a}+1) = \frac{\sqrt{(e^{2a}+1)^3}}{e^a}$$

(2)　$e^{2a} = s > 0$，$f(s) = \dfrac{(s+1)^3}{s}$ とおくと, (1)より，$r(a) = \sqrt{f(s)}$ となる。

$$f'(s) = \frac{3(s+1)^2 s - (s+1)^3}{s^2} = \frac{(s+1)^2(2s-1)}{s^2}$$

s	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

右表より，$f(s)$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとるので,

$r(a)$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

[解 説]

計算量が多いので，少し工夫をしています。なお，$\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{t-a}{e^t - e^a}$ は，微分係数の定義を利用して，極限値を求めています。

4

問題のページへ

(1) $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & 1 \end{pmatrix}$に対して，$P^{-1}$が存在しない条件は，$p-qr=0$ ………(＊)

(i) $r=0$ のとき　(＊)から $p=0$

(ii) $r\neq 0$ のとき　(＊)から $q=\dfrac{p}{r}$ となり，

$$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{p}{r} \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$$

よって，$k=\dfrac{1}{r}$ とおくと，$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となる。

(2) 条件より，$A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$………①

両辺に左から A をかけて，$A^2\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，$A^2=O$ から，

$$A\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{………②}$$

さて，ここで P^{-1} が存在しないと仮定すると, (1)から,

(i) $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき　$A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり，①に反する。

(ii) $\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ のとき　$A\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=kA\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となり，①②から $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$

すると，$k=0$ となり, (1)に反する。

(i)(ii)より, P は逆行列をもつ。

(3) $A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，

$$2p+4r=q\text{………③},\quad -p-2r=1\text{………④}$$

③④より，$q=-2$ であり，このとき③と④は一致する。

そこで，$r=0$ とすると，$p=-1$ となり，

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[解 説]

(1)は(2)の誘導ですが，この利用の方法が本問のポイントとなっています。

5

問題のページへ

(1)　C_a：$(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ より，$x^2+ay^2-2ax-3a-1=0$

$$(y^2-2x-3)a+(x^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

どんな a に対しても①が成立する条件は，

$$y^2-2x-3=0 \cdots\cdots\cdots ②,\quad x^2-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③より，$x=\pm 1$

$x=1$ のとき②から $y=\pm\sqrt{5}$，$x=-1$ のとき②から $y=\pm 1$ となり，定点の座標は，

$$(1,\ \sqrt{5}),\ (1,\ -\sqrt{5}),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

(2)　$a>0$ のとき C_a が通過する点 $(x,\ y)$ は，①が $a>0$ の解をもつ $(x,\ y)$ である。

(i)　$y^2-2x-3\neq 0$ のとき

①より，$a=-\dfrac{x^2-1}{y^2-2x-3}>0$ から，

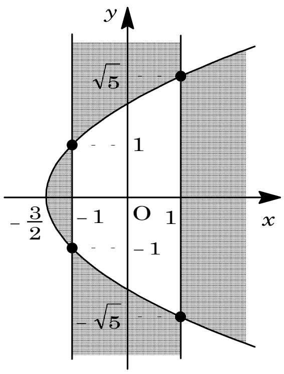
$$-(x^2-1)(y^2-2x-3)>0$$

$$(x+1)(x-1)(y^2-2x-3)<0$$

(ii)　$y^2-2x-3=0$ のとき

①より，$x^2-1=0$

(1)から，$(x,\ y)=(1,\ \pm\sqrt{5}),\ (-1,\ \pm 1)$



(i)(ii)より，C_a が通過する範囲は右図の網点部となる。

ただし，黒丸以外の境界は含まない。

[解 説]

曲線の通過領域を実数解条件として翻訳する頻出問題です。①式がパラメータ a についての 1 次式なので，複雑な処理は必要ありません。なお，領域図示の過程は省きましたが，原点は不等式を満たさないので，その隣接領域からはじめて，市松模様に網点をつけています。