$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

次の関係式を満たす関数 $f(x)$ がただ 1 つ存在するように，定数 a の値を求めよ。

$$f(x)=ax+\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt\right)^4$$

2

解答解説のページへ

曲線$C : y=\sin x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$を考える。$C$ 上の点 P における C の法線を l とする。

(1) 法線 l が点 $\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通るような点 P がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) (1)の条件を満たす点 P に対し，直線 l，曲線 C，直線 $y=1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，直線 l，曲線 C，x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を比較せよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

曲線 $C : y = e^x$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\ e^a)$, $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す。さらに，$r(a) = \lim_{t \to a} L_a(t)$ と定義する。

(1)　$r(a)$ を求めよ。

(2)　a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

2 次正方行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) P が逆行列をもたなければ，$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}$ となる k が存在するか，または $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを示せ。

(2) 条件 $A^2=O$，$A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす 2 次正方行列 A が存在するとき，P は逆行列をもつことを示せ。

(3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき $A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような $p,\ q,\ r$ を 1 組求め，$P^{-1}AP$ を計算せよ。

5

解答解説のページへ

実数 a に対して，曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ によって定める。

(1)　C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。

(2)　a が正の実数全体を動くとき，C_a が通過する範囲を図示せよ。