1

問題のページへ

(1) $|x|>1$ のとき $f(x)=\dfrac{\log|x|}{x}$，$|x|\leqq 1$ のとき $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

まず，$f(x)$ は $x=\pm 1$ において微分可能なので，$x=\pm 1$ で連続である。

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$ より，$0=a+b+c+d$ ………①

$\displaystyle\lim_{x\to -1-0} f(x)=f(-1)$ より，$0=-a+b-c+d$ ………②

①②より，$a+c=0$，$b+d=0$ となり，$c=-a$，$d=-b$ から，

$$f(x)=ax^3+bx^2-ax-b\quad(|x|\leqq 1)$$

このとき，$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\log(1+h)}{h(1+h)}=\lim_{h\to+0}\frac{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}}{1+h}=\log e=1$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{a(1+h)^3+b(1+h)^2-a(1+h)-b}{h}=2a+2b$$

$f(x)$ は $x=1$ において微分可能なので，$2a+2b=1$ ………③

また，$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\log(1-h)}{h(-1+h)}=\lim_{h\to-0}\frac{\log(1-h)^{-\frac{1}{h}}}{1-h}=\log e=1$

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{a(-1+h)^3+b(-1+h)^2-a(-1+h)-b}{h}$$
$$=2a-2b$$

$f(x)$ は $x=-1$ において微分可能なので，$2a-2b=1$ ………④

③④より $a=\dfrac{1}{2}$，$b=0$ となり，$c=-a=-\dfrac{1}{2}$，$d=-b=0$ である。

(2) (1)より，$|x|\leqq 1$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x$ となり，

$$f(-x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x=-f(x)$$

また，$|x|>1$ のとき $f(-x)=\dfrac{\log|-x|}{-x}=-f(x)$

よって，$y=f(x)$ のグラフは原点対称となっており，以下 $x\geqq 0$ で考える。

(i) $0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$	↗	0

(ii) $x>1$ のとき

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	0

© 電送数学舎 2004

$x<0$ のときを考え合わせると，$f(x)$ の最大値は，$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ または $f(e)=\dfrac{1}{e}$ である。

ここで，$3\sqrt{3}>e$ から，$\dfrac{1}{3\sqrt{3}}<\dfrac{1}{e}$ であるので，$f(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{e}$ となる。

[解 説]

$x=\pm1$ において微分可能という条件を，まず連続という必要条件から攻めていくことがポイントとなります。

© 電送数学舎 2004

2

問題のページへ

(1) $f(x)=\sin^3 x$ より，$f'(x)=3\sin^2 x\cos x$ となり，

$$f'(0)=0,\quad f'(2\pi)=0$$

(2) $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin x-\cos^2 x\sin x)\,dx=\left[-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{2\pi}=0$$

(3) $p(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと, (1), (2)より,

$$\int_0^{2\pi}p(x)f''(x)\,dx=\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)f''(x)\,dx$$

$$=\left[(ax^2+bx+c)f'(x)\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(2ax+b)f'(x)\,dx$$

$$=-\left[(2ax+b)f(x)\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}2af(x)\,dx$$

$$=2a\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0$$

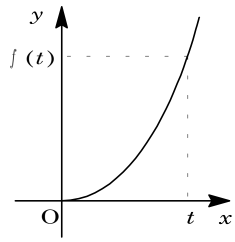
[解 説]

(2)の結論はグラフの対称性から明らかなのですが，そのまま計算しても容易に示せます。

© 電送数学舎 2004

3

問題のページへ



(1)　まず，$X(t)=\pi\int_0^t\{f(x)\}^2dx$ より，$X'(t)=\pi\{f(t)\}^2$

また，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で連続で，単調に増加するので，

$$Y(t)=\pi\int_0^{f(t)}x^2dy=\pi\int_0^t x^2f'(x)\,dx$$

よって，$Y'(t)=\pi t^2f'(t)$

(2)　$t\geqq 0$ に対して $X(t)=Y(t)$ より，$X'(t)=Y'(t)$ $(t>0)$ となるので，(1)から，

$$\pi\{f(t)\}^2=\pi t^2f'(t)\,,\ \{f(t)\}^2=t^2f'(t)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)$ が定数の場合は，明らかに(＊)は成立しないので，$n\geqq 1$ として，$f(x)$ を n 次の整式とする。

(＊)の左辺の次数は $2n$，右辺の次数は $2+(n-1)=n+1$ から，

$$2n=n+1\,,\ n=1$$

これより，$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ とおくことができる。

(＊)に代入して，$(at+b)^2=at^2$，$(a^2-a)t^2+2abt+b^2=0$

すべての $t>0$ に対して成立するので，

$$a^2-a=0\,,\ 2ab=0\,,\ b^2=0$$

$a\neq 0$ から，$a=1$，$b=0$ となり，$f(x)=x$ $(x\geqq 0)$ である。

(3)　$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ のとき，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$ $(x>0)$ であり，

$$\{f(t)\}^2=\frac{t^2}{(1+t)^2}=t^2f'(t)$$

よって，(1)より，$X'(t)=Y'(t)$

すると，$X(0)=Y(0)$ から，$t\geqq 0$ において，$X(t)=Y(t)$ である。

[解 説]

抽象関数が題材で，しかも問題文が長いのですが，案ずるほどではありませんでした。

© 電送数学舎 2004

4

問題のページへ

(1)　$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$に対して，ハミルトン・ケーリーの定理を適用すると，

$$X^2-(x+w)X+(xw-yz)E=O\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$X^2+aX+bE=O\cdots\cdots\cdots②$

①②から，$(-x-w-a)X+(xw-yz-b)E=O\cdots\cdots\cdots③$

$x+w\neq -a$ のとき，$X=\dfrac{xw-yz-b}{x+w+a}E$

ここで，$\dfrac{xw-yz-b}{x+w+a}=k$ とおくと，$X=kE$ （k は実数）

②に代入して，$(k^2+ak+b)E=O$，$k^2+ak+b=0\cdots\cdots\cdots④$

さて，④が重解をもつとき，その重解は $k=-\dfrac{a}{2}$ となる。このとき，$X=-\dfrac{a}{2}E$ であり，$x+w=-\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}=-a$ となるが，これは $x+w\neq -a$ に反する。

よって，④は異なる 2 つの実数解をもち，$D=a^2-4b>0$

このとき，④の解は，$k=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ であり，

$$X=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)　(1)より，$a^2-4b\leqq 0$ のとき，$x+w=-a\cdots\cdots\cdots⑤$

③から，$xw-yz-b=0$，$xw=yz+b\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より, x, w は 2 次方程式 $t^2+at+(yz+b)=0$ の 2 つの実数解となり，

$$D=a^2-4(yz+b)\geqq 0，\ 4yz\leqq a^2-4b$$

$a^2-4b\leqq 0$ なので，$yz\leqq 0$ である。

[解 説]

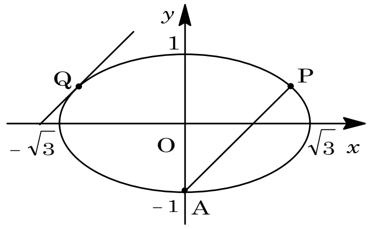
(2)は，(1)の命題の対偶を考えるところからスタートします。(1)と(2)の設問がうまくつながっています。

© 電送数学舎 2004

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　点 P は楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点なので，



$\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= (\sqrt{3}\cos\theta)^2+(\sin\theta+1)^2\\ &= 3\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta+1\\ &= -2\sin^2\theta+2\sin\theta+4\\ &= -2\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

これより，AP は $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ をとる。このとき，点 P の座標は，$x\geqq0$ より $\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，すなわち $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{3}{2}(1,\ 1)$ である。

楕円 C 上の点 Q を $(\sqrt{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおくとき，Q における接線の方程式は，

$$\frac{\sqrt{3}\cos\varphi}{3}x+(\sin\varphi)y=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

この接線が直線 AP と平行になるとき，△APQ の面積は最大となる。このとき，$(*)$の法線ベクトルの成分が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi\right)$ から，

$$1\times\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi+1\times\sin\varphi=0,\ \ \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ より，$\varphi+\dfrac{\pi}{6}=\pi$，$\varphi=\dfrac{5}{6}\pi$

以上より，点 Q の座標は $\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{5}{6}\pi,\ \sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$，すなわち $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

△APQ の面積の最大値は，$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$ となる。

[解 説]

いろいろな解法が考えられますが，上の解では，(1)，(2)とも楕円のパラメータ表示を利用しています。なお，最後の△APQ の面積計算は，P と Q の y 座標が等しいので，簡単でした。

© 電送数学舎 2004