

1

解答解説のページへ

実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が、次の 2 つの条件(i), (ii)を満たしている。

- (i) すべての x について、 $f(x) > 0$ である。
 - (ii) すべての x, y について、 $f(x+y) = f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ。
- (1) $f(0) = 1$ を示せ。
 - (2) $g(x) = \log f(x)$ とする。このとき、 $g'(x) = f'(0) - x$ が成り立つことを示せ。
 - (3) $f'(0) = 2$ となるような $f(x)$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + b}$ が定める曲線 $y = f(x)$ は原点で直線 $y = x$ に接している。

- (1) b の値を求めよ。
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ が最大値と最小値をもつような a の値の範囲を求め、そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (4) $f(x)$ が最大値をもつが最小値はもたないとき、 a の値と $f(x)$ の最大値を求めよ。

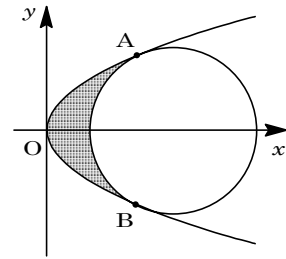
3

解答解説のページへ

右の図のように、円 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ ($r > \frac{1}{2}$) が放物線 $y^2 = x$ と 2 点 A, B で接している。

- (1) 点 A の x 座標および a を r で表せ。
- (2) 円と放物線で囲まれた部分(網点部分)を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(r)$ とする。このとき、

$$\lim_{r \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{V(r)}{\left(r - \frac{1}{2}\right)^3} \text{ を求めよ。}$$



4

解答解説のページへ

行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3 & 3-a \end{pmatrix}$ に対して、行列 $P = A - E$ が $P^2 = P$ を満たしている。ただし、

E は 2 次の単位行列とする。

- (1) a, b が満たす条件を求めよ。
- (2) A の成分がすべて整数のとき、 a が満たす条件を求めよ。
- (3) $A^{-1} = sP + tE$ を満たす実数 s, t を求めよ。

5

解答解説のページへ

2 点 $(0, 1)$, $(0, -1)$ を焦点とする双曲線 C_1 と 2 点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$ を焦点とする楕円 C_2 は 2 点 $(0, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{1}{2})$ のみを共有している。

- (1) C_1 と C_2 の方程式を、それぞれ求めよ。
- (2) C_1 と漸近線を共有し、 C_1 と異なる双曲線を C_3 とする。 C_2 と C_3 が 2 点のみを共有するとき、 C_3 の方程式を求めよ。