

1

問題のページへ

$$(1) f(x) = \frac{\log x}{(1+x)^a} \text{ より, } f'(x) = \frac{x^{-1}(1+x)^a - a \log x \cdot (1+x)^{a-1}}{(1+x)^{2a}} = \frac{1+x - ax \log x}{x(1+x)^{a+1}}$$

ここで, $g(x) = 1+x - ax \log x$ とおくと, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x)^{a+1}}$ となり,

$$g(e^{\frac{1}{a}}) = 1 + e^{\frac{1}{a}} - ae^{\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad g(e^{\frac{2}{a}}) = 1 + e^{\frac{2}{a}} - ae^{\frac{2}{a}} \cdot \frac{2}{a} = 1 - e^{\frac{2}{a}} < 0$$

$x > 0$ なので $x(1+x)^{a+1} > 0$ より, $f'(e^{\frac{1}{a}}) > 0$, $f'(e^{\frac{2}{a}}) < 0$

よって, $e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c) = 0$ となる c が存在する。

$$(2) g'(x) = 1 - a \log x - ax \cdot \frac{1}{x} = 1 - a - a \log x$$

$$g'(x) = 0 \text{ の解は } \log x = \frac{1-a}{a} \text{ より } x = e^{\frac{1-a}{a}}$$

また, $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ から,

$g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	...	$e^{\frac{1-a}{a}}$...	∞
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	1	\nearrow		\searrow	$-\infty$

よって, $g(x) = 0$ となる x は 1 つしかなく, 言い換えると, $f'(c) = 0$ となる c はただ 1 つである。

すると, $f(x)$ の増減は右表のようになり, $f(x)$ は $x = c$ で最大値をとることになる。

x	0	...	c	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		\nearrow		\searrow

[解 説]

微分法の標準的な問題です。ただ, $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = 1$ はプロセス抜きで答えるしかないでしょう。

2

問題のページへ

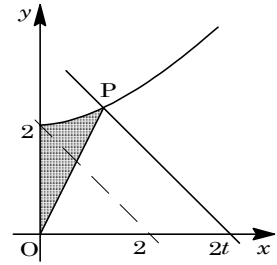
- (1) 点
- $P(p, \sqrt{p^2 + 4})$
- を通る傾き
- -1
- の直線は、

$$y - \sqrt{p^2 + 4} = -(x - p)$$

点 $(2t, 0)$ を通ることより、 $-\sqrt{p^2 + 4} = -2t + p$

$$p^2 + 4 = (-2t + p)^2, \quad tp = t^2 - 1$$

$$p = \frac{t^2 - 1}{t} = t - \frac{1}{t}, \quad \sqrt{p^2 + 4} = 2t - p = t + \frac{1}{t}$$

したがって、 $P(t - \frac{1}{t}, t + \frac{1}{t})$ となる。

- (2) 点
- P
- が
- C
- 上を動くとき、
- $2t \geq 2$
- から
- $t \geq 1$
- となり、
- t
- の最小値は
- 1
- である。

$$(3) \quad S = \int_0^p y dx - \frac{1}{2} p \sqrt{p^2 + 4} = \int_0^p y dx - \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \left(t + \frac{1}{t}\right) = \int_0^p y dx - \frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

ここで、(1)より曲線 C は、 $x = u - \frac{1}{u}$ 、 $y = u + \frac{1}{u}$ と表せる。すると、 $dx = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du$ で、 $x = 0$ のとき $u = 1$ 、 $x = p$ のとき $u = t$ となり、

$$\begin{aligned} \int_0^p y dx &= \int_1^t \left(u + \frac{1}{u}\right) \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^t \left(u + \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3}\right) du \\ &= \left[\frac{u^2}{2} + 2 \log|u| - \frac{1}{2u^2}\right]_1^t = \frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + 2 \log t \end{aligned}$$

$$\text{以上より、} S = \frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + 2 \log t - \frac{1}{2} \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) = 2 \log t$$

【解説】

(1)は(3)の積分を実行するための誘導となっています。なお、(2)については、図より明らかなのですが、関係式 $2t = p + \sqrt{p^2 + 4}$ を用いても簡単です。

3

問題のページへ

(1) 条件より, $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ ($0 < x < 1$) なので, $0 < x < 1$ のとき $g'(x) = f(x)$

また, $g(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$ ($x > 1$) より, $x > 1$ のとき $g'(x) = f(x) - f(x-1)$

(2) $0 < x < 1$ のとき, $g(x) = \int_0^x 2\pi \cos(2\pi t) dt = [\sin(2\pi t)]_0^x = \sin(2\pi x)$

$x > 1$ のとき, $g(x) = \int_{x-1}^x 2\pi \cos(2\pi t) dt = [\sin(2\pi t)]_{x-1}^x$
 $= \sin(2\pi x) - \sin(2\pi(x-1)) = \sin(2\pi x) - \sin(2\pi x) = 0$

(3) (1)より, $0 < x < 1$ のとき $f(x) = g'(x) = 2\pi \cos(2\pi x) + 1$ ……

$x > 1$ のとき, $f(x) - f(x-1) = g'(x) = 0$ となり,

$f(x) = f(x-1)$ ……

ここで, $1 < x < 2$ のとき, $0 < x-1 < 1$ なので, (1)より,

$f(x) = 2\pi \cos(2\pi(x-1)) + 1 = 2\pi \cos(2\pi x) + 1$

すると, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2\pi + 1$ となっており, $f(x)$ は $x = 1$ で連続である。

また, $f(0) = 2\pi + 1$ と定義すると, $0 < x < 2$ において,

$f(x) = 2\pi \cos(2\pi x) + 1$

同様にして, (1)を利用していくと, $f(x) = 2\pi \cos(2\pi x) + 1$ ($x > 0$)

[解 説]

記述の方法の難しい問題です。内容的には, もう一ひねりあるのかとも思ったのですが……。

4

問題のページへ

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、ハミルトン・ケーリーの定理より、

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \dots\dots\dots$$

条件より、 $A^2 = E \dots\dots\dots$

$$\text{より、} -(a+d)A + (ad-bc+1)E = O$$

$$a+d \neq 0 \text{ より、} A = \frac{ad-bc+1}{a+d}E = kE \quad \left(k = \frac{ad-bc+1}{a+d}\right)$$

に代入して、 $k^2E = E$ となり、 $k^2 = 1$, $k = \pm 1$

よって、 $A = E$ または $A = -E$ である。

(2) $A^2 + E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc+1 & 2ab \\ 2ac & bc+a^2+1 \end{pmatrix}$ より、

$$\begin{aligned} \Delta &= (a^2+bc+1)(bc+a^2+1) - 4a^2bc = a^4 + b^2c^2 + 1 - 2a^2bc + 2bc + 2a^2 \\ &= a^4 + b^2c^2 + 1 - 2a^2bc + 2bc - 2a^2 + 4a^2 = (a^2 - bc - 1)^2 + 4a^2 > 0 \end{aligned}$$

よって、 $A^2 + E$ は逆行列をもつ。

さて、 $A^4 = E$ のとき、 $A^4 - E = O$, $(A^2 + E)(A^2 - E) = O \dots\dots\dots$

の両辺に左から、 $A^2 + E$ の逆行列をかけて、

$$(A^2 + E)^{-1}(A^2 + E)(A^2 - E) = (A^2 + E)^{-1}O, \quad A^2 - E = O, \quad A^2 = E$$

$a+d = 2a \neq 0$ なので、(1)より、 $A = E$ または $A = -E$ となる。

[解 説]

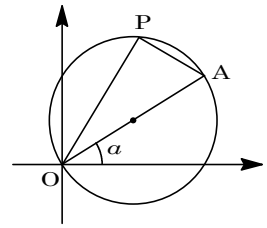
(2)が(1)の誘導となっている行列の基本的な問題です。 $\Delta > 0$ を導くところは、ちょっとテクニカルな変形をしています。

5

問題のページへ

- (1) 点 $A(2a, a)$ と原点を結ぶ線分を直径とする円周上の点を $P(r, \theta)$ とおくと, $\angle OPA = \frac{\pi}{2}$ となる。

よって, 極方程式 $r = 2a \cos(a - \theta)$ は, 中心 (a, a) , 半径 a の円を表す。なお, 点 P が点 A , 点 O に一致しているときも成立している。



- (2) C_a が直線 $y = -x$ に接するとき, OA と $y = -x$ が直交する。
よって, n を 0 以上の整数として, $\alpha = n\pi + \frac{\pi}{4}$ となる。

[解 説]

この程度の記述でよいのか, もっと詳しく書いた方がよいのか, とまどってしまいます。そんな問題です。