

1

問題のページへ

- (1) $f'(x) > 0$ より、 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ において単調に増加するので、 $0 \leq x < t$ で $f(x) < f(t)$ 、 $t < x \leq 1$ で $f(x) > f(t)$ となる。

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^1 |f(t) - f(x)| x dx = \int_0^t \{f(t) - f(x)\} x dx - \int_t^1 \{f(t) - f(x)\} x dx \\ &= f(t) \int_0^t x dx - \int_0^t x f(x) dx - f(t) \int_t^1 x dx + \int_t^1 x f(x) dx \\ &= \frac{t^2}{2} f(t) - \left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2}\right) f(t) - \int_0^t x f(x) dx + \int_t^1 x f(x) dx \\ &= \left(t^2 - \frac{1}{2}\right) f(t) - \int_0^t x f(x) dx - \int_1^t x f(x) dx \end{aligned}$$

すると、 $I'(t) = 2t f(t) + \left(t^2 - \frac{1}{2}\right) f'(t) - t f(t) - t f(t) = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right) f'(t)$

- (2) (1)より、 $I'(t) = \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) f'(t)$

$f'(t) > 0$ なので、右表より $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$I(t)$ は最小となる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$...	1
$I'(t)$		-	0	+	
$I(t)$		\searrow		\nearrow	

[解 説]

絶対値のついた関数を積分する問題です。ただし、 $f'(x) > 0$ という条件があるため、煩雑な計算は必要ありません。

2

問題のページへ

$$(1) \quad g(x) = x - \log(1+x) \quad (x > 0) \text{ とおくと, } g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0$$

$x > 0$ に対して, $g(x) > g(0) = 0$ なので, $\log(1+x) < x$

また, $h(x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad (x > 0)$ とおくと,

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

$x > 0$ に対して, $h(x) > h(0) = 0$ なので, $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$

以上より, $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$

$$(2) \quad \begin{aligned} \log a_n &= \log \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \log \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \right) + \cdots + \log \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow 0$ なので, (1)より,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2 < \log \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) < \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2 < \log a_n < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = I$

また, $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2 \rightarrow \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ より, $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right)^2 \rightarrow 0$

以上より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = I$

すると, 対数関数は連続関数なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^I$ である。

[解 説]

はさみうちの原理に加えて, 区分求積法も利用し, 極限値を証明する問題です。うまい誘導がついています。

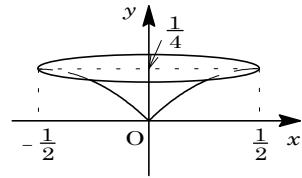
3

問題のページへ

$$(1) \quad y = x(1-x) \text{ より, } x^2 - x + y = 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ より, } x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4y})$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(1 - 2y - \sqrt{1-4y})$$



0 $y = h$ における水量を W とすると,

$$W = \int_0^h \pi x^2 dy = \frac{\pi}{2} \int_0^h (1 - 2y - \sqrt{1-4y}) dy$$

すると, $\frac{dW}{dh} = \frac{\pi}{2}(1 - 2h - \sqrt{1-4h}) \dots\dots\dots$

ここで条件より, $\frac{dW}{dt} = V$, $\frac{dh}{dt} = u$, $\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$ なので,

$$V = \frac{dW}{dh} u \dots\dots\dots$$

より, $V = \frac{\pi}{2}(1 - 2h - \sqrt{1-4h})u$ なので,

$$u = \frac{2V}{\pi(1 - 2h - \sqrt{1-4h})} = \frac{V(1 - 2h + \sqrt{1-4h})}{2\pi h^2}$$

(2) $\frac{dW}{dt} = V$ で, $t = 0$ のとき $W = 0$ から, $W = Vt \dots\dots\dots$

$h = \frac{1}{4}$ のとき, 容器に水がいっぱいになり, このときの水量 W は,

$$W = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} (1 - 2y - \sqrt{1-4y}) dy = \frac{\pi}{2} \left[y - y^2 + \frac{1}{6}(1-4y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{96} \dots\dots\dots$$

より, $Vt = \frac{\pi}{96}$ となり, 求める時間は $t = \frac{\pi}{96V}$ である。

[解 説]

以前はよく出題されていた水の問題に久々に出会いました。演習する価値のある問題です。

4

問題のページへ

$$(1) a_{n+1} = 2a_n + ca_{n-1} \dots\dots\dots, a_{n+2} = (2c+1)a_n + 6a_{n-1} \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } a_{n+2} = 2a_{n+1} + ca_n = 2(2a_n + ca_{n-1}) + ca_n = (c+4)a_n + 2ca_{n-1}$$

と一致することより, $2c+1 = c+4$, $2c = 6$ であり, $c = 3$ となる。

$$(2) \text{ より, } a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \text{ なので, } \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\text{したがって, } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) E \text{ を単位行列とし, } X = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \text{ とおくと, 条件より, } AX = bX$$

$$(A - bE)X = O \dots\dots\dots$$

$X \neq O$ なので, より $(A - bE)^{-1}$ が存在しない。

$$\text{ここで, } A - bE = \begin{pmatrix} -b & 1 \\ 3 & 2-b \end{pmatrix} \text{ より, } -b(2-b) - 3 = 0 \text{ となり, } b = 3, -1$$

$$b = 3 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

$$b = -1 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

$b = 3$ のときも, $b = -1$ のときも, ともに題意を満たす。

$$(4) \text{ より } A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ より } A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & (-1)^n \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n + 3(-1)^n & 3^n - (-1)^n \\ 3^{n+1} + 3(-1)^{n+1} & 3^{n+1} - (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで, (2)より, } \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^{n-1} + 3(-1)^{n-1} & 3^{n-1} - (-1)^{n-1} \\ 3^n + 3(-1)^n & 3^n - (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, } a_n = \frac{1}{2} \{ 3^{n-1} + 3(-1)^{n-1} \} + \frac{1}{2} \{ 3^{n-1} - (-1)^{n-1} \} = 3^{n-1} + (-1)^{n-1}$$

[解 説]

漸化式と行列の n 乗の融合という以前よく出会った問題です。前問にひき続き懐かしいという感じがします。

5

問題のページへ

(1) 直線 l の方向ベクトルを $(\cos\theta, \sin\theta)$ とすることが
 できるので、

$$\begin{aligned} (x, y) &= (1, 0) + t(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= (1 + t\cos\theta, t\sin\theta) \end{aligned}$$

$2x^2 - 2y^2 = 1$ に代入して、

$$\begin{aligned} 2(1 + t\cos\theta)^2 - 2t^2\sin^2\theta &= 1 \\ 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)t^2 + 4t\cos\theta + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$2t^2\cos 2\theta + 4t\cos\theta + 1 = 0 \dots\dots(*)$$

θ は $\frac{\pi}{4}$ の整数倍でないので、 $\cos 2\theta \neq 0$ となり、

$$D/4 = 4\cos^2\theta - 2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2(2\cos^2\theta - 1) = 2$$

$D > 0$ より t は 2 つ存在し、直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点で交わる。

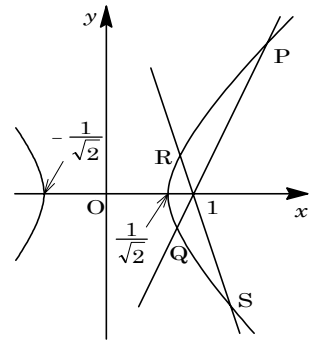
(2) $(*)$ の解を $t = \alpha, \beta$ とすると、 $P(1 + \alpha\cos\theta, \alpha\sin\theta)$ 、 $Q(1 + \beta\cos\theta, \beta\sin\theta)$
 となり、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -\frac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2\cos 2\theta}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} PQ^2 &= (1 + \alpha\cos\theta - 1 - \beta\cos\theta)^2 + (\alpha\sin\theta - \beta\sin\theta)^2 \\ &= (\alpha - \beta)^2\cos^2\theta + (\alpha - \beta)^2\sin^2\theta = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \frac{4\cos^2\theta}{\cos^2 2\theta} - \frac{2}{\cos 2\theta} = \frac{4\cos^2\theta - 2\cos 2\theta}{\cos^2 2\theta} = \frac{2}{\cos^2 2\theta} \end{aligned}$$

(3) (2) と同様にして、 $RS^2 = \frac{2}{\cos^2 2(\theta + \frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\cos^2(2\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\sin^2 2\theta}$

$$\text{したがって、} \frac{1}{PQ^2} + \frac{1}{RS^2} = \frac{\cos^2 2\theta}{2} + \frac{\sin^2 2\theta}{2} = \frac{1}{2}$$



[解 説]

一般的に計算量の多い 2 次曲線と直線の関係についての問題です。媒介変数を利用して、計算量を減らす工夫がポイントです。