

1

解答解説のページへ

$f(x)$  を  $0 \leq x \leq 1$  において連続かつ  $0 < x < 1$  において微分可能で  $f'(x) > 0$  を満たす関数とする。  $0 < t < 1$  に対し、  $I(t) = \int_0^1 |f(t) - f(x)|x dx$  とおく。

- (1) 導関数  $I'(t)$  を求めよ。
- (2)  $I(t)$  が最小となる  $t$  の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

(1)  $x > 0$  に対して次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

(2)  $f(x)$  を  $0 \leq x \leq 1$  で連続で、 $f(x) \geq 0$  を満たす関数とする。

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)\right), \quad I = \int_0^1 f(x) dx$$

とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^I$  であることを示せ。

3

解答解説のページへ

曲線  $y = x(1-x)$  ( $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ) を  $y$  軸のまわりに回転してできる容器に、単位時間あたり一定の割合  $V$  で水を注ぐ。

- (1) 水面の上昇する速度  $u$  を水面の高さ  $h$  の関数として表せ。
- (2) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

4

解答解説のページへ

数列  $\{a_n\}$  と数  $c$  が次の条件を満たすとする。

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n + ca_{n-1}, \quad a_{n+2} = (2c+1)a_n + 6a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

- (1)  $c$  を求めよ。
- (2)  $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$  を満たす 2 次正方形行列  $A$  を求めよ。
- (3)  $A \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$  を満たす数  $b$  をすべて求めよ。
- (4)  $a_n$  を求めよ。

5

解答解説のページへ

$C$  を双曲線  $2x^2 - 2y^2 = 1$  とする。 $l, m$  を点  $(1, 0)$  を通り,  $x$  軸とそれぞれ  $\theta, \theta + \frac{\pi}{4}$  の角をなす 2 直線とする。ここで  $\theta$  は  $\frac{\pi}{4}$  の整数倍でないとする。

- (1) 直線  $l$  は双曲線  $C$  と相異なる 2 点  $P, Q$  で交わることを示せ。
- (2)  $PQ^2$  を,  $\theta$  を用いて表せ。
- (3) 直線  $m$  と曲線  $C$  の交点を  $R, S$  とするとき,  $\frac{1}{PQ^2} + \frac{1}{RS^2}$  は  $\theta$  によらない定数となることを示せ。