

1

問題のページへ

(1) $f_n(x) = \sin^{n+2}x + 2\cos^{n+2}x$ より,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (n+2)\sin^{n+1}x \cos x - 2(n+2)\cos^{n+1}x \sin x \\ &= (n+2)\sin x \cos x (\sin^n x - 2\cos^n x) \end{aligned}$$

また, $\sin^n \alpha = 2\cos^n \alpha$ すなわち $\tan^n \alpha = 2$, $\tan \alpha = 2^{\frac{1}{n}}$ を満たす α が, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ にただ 1つ存在し, これより $f_n(x)$ の増減は右表のよう

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$	0	-	0	+	0
$f_n(x)$	2	\searrow		\nearrow	1

になる。

このとき, $1 + 2^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ から $\cos^2 \alpha = \left(1 + 2^{\frac{2}{n}}\right)^{-1}$, $\cos \alpha = \left(1 + 2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ すると, $f_n(\alpha) = \sin^{n+2}\alpha + 2\cos^{n+2}\alpha = \sin^n \alpha \sin^2 \alpha + 2\cos^n \alpha \cos^2 \alpha$

$$= 2\cos^n \alpha \sin^2 \alpha + 2\cos^n \alpha \cos^2 \alpha = 2\cos^n \alpha = 2\left(1 + 2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

以上より, $M_n = 2$, $L_n = 2\left(1 + 2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$ (2) (1)より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{L_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \left(1 + 2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 \times 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[解 説]

問題を見たときに, (2)は e の定義式を利用する設問と推測しましたが, その予想は, はずれてしまいました。

2

問題のページへ

(1) $f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと, $f'(x) = e^x - 1$
 $x > 0$ のとき, $f'(x) > 0$ より, $f(x) > f(0) = 0$
よって, $x > 0$ のとき, $e^x > 1+x$ ……

(2) $x = \tan \varphi$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) とおくと, $x = 0$ のとき $\varphi = 0$ となり, また条件より,
 $x = M$ のとき $\varphi = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) となるので,

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^\theta \frac{1}{1+\tan^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int_0^\theta d\varphi = [\varphi]_0^\theta = \theta \dots\dots$$

(3) より, $e^{x^2} > 1+x^2$ から, $\frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{1+x^2}$ となり, $M > 0$ に対して,

$$\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}} dx < \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{ここで, より, } \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx = \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{したがって, } \int_0^M \frac{1}{e^{x^2}} dx < \frac{\pi}{2}$$

[解 説]

ノーヒントで(3)の結論の証明では難問ですが, (1)(2)のていねいな誘導のおかげで,
基本題となっています。

3

問題のページへ

$x^{\sqrt{a}} > a^{\sqrt{x}}$ より, $\log x^{\sqrt{a}} > \log a^{\sqrt{x}}$, $\sqrt{a} \log x > \sqrt{x} \log a$ なので,

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} > \frac{\log a}{\sqrt{a}} \dots\dots\dots (*)$$

ここで, $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - \log x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

x	0	...	e^2	...	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-	\nearrow	$\frac{2}{e}$	\searrow	0

すると, (*)はどんな正の実数 x についても, $f(x) > f(a)$ ということなので, この条件を満たす a の値は, 上表より $a = e^2$ となる。

[解 説]

毎年のように類題の出る頻出有名問題です。ポイントは(*)の形に不等式を変形することです。過去の記憶を辿っていくと, 98年の都立大・後期, 97年の東北大などがあります。

4

問題のページへ

(1) E を単位行列とすると, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し, ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \dots\dots\dots$$

条件より, $A^2 = A \dots\dots\dots$

$$\text{より, } (1-a-d)A + (ad-bc)E = O \dots\dots\dots$$

$$a+d \neq 1 \text{ なので, } \text{ から, } A = \frac{ad-bc}{a+d-1}E = kE \quad \left(k = \frac{ad-bc}{a+d-1} \right)$$

に代入して, $k^2E = kE$ なので, $k = 0, 1$

$$\text{よって, } k=0 \text{ のとき } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k=1 \text{ のとき } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $X = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux & uy \\ vx & vy \end{pmatrix}$ に対し, ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$X^2 - (ux+vy)X + (uxvy - uyvx)E = O$$

$ux+vy=1$ より, $X^2 - X = O, X^2 = X$

(3) $a+d=1$ のとき, より $(ad-bc)E = O, ad-bc=0$

$$\text{すると, } d \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc \\ cd-cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ から, } d \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$(i) \quad d \neq 0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{d} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ より, } A = \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \cdot b & b \\ \frac{c}{d} \cdot d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{c}{d} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad d = 0 \text{ のとき } a=1, bc=0 \text{ より, } A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \end{pmatrix}$$

(i)(ii)のいずれの場合も, A は(2)の X の形になる。

[解 説]

行列 X は 2×1 行列と 1×2 行列との積の形で表されていますが, 上の解では, その特性は利用せずに, 普通に計算を進めました。

5

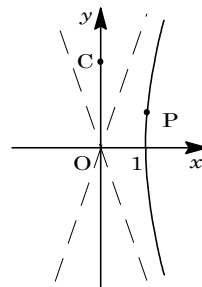
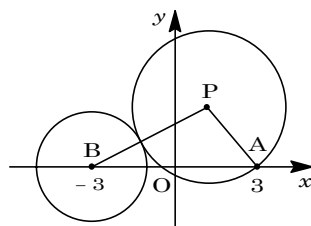
問題のページへ

(1) $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$ とし、円の中心を $P(X, Y)$

とおく。

条件より、 $PB - 2 = PA$, $PB - PA = 2$ すると、点 P は 2 点 A, B を焦点とする双曲線の右側の枝を描く。この方程式を $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (c^2 = a^2 + b^2)$ とすると、 $2a = 2$ より $a = 1$, また $c = 3$ から $b^2 = 3^2 - 1^2 = 8$ となる。よって、 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 (x > 0)$ (2) (1) より、点 $P(X, Y)$ は $X^2 - \frac{Y^2}{8} = 1 (X > 0)$ を満たし、 $C(0, a)$ とおくと、

$$\begin{aligned} PC^2 &= X^2 + (Y - a)^2 = 1 + \frac{Y^2}{8} + (Y - a)^2 \\ &= \frac{9}{8}Y^2 - 2aY + a^2 + 1 = \frac{9}{8}\left(Y - \frac{8}{9}a\right)^2 + \frac{1}{9}a^2 + 1 \end{aligned}$$

 Y は任意の値をとりうるので、 $Y = \frac{8}{9}a$ のとき PC^2 は最小値をとる。このとき PC は最小値 $\sqrt{\frac{1}{9}a^2 + 1} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + 9}$ をとる。

[解 説]

第 3 問に続き、本問も有名頻出問題です。類題は 98 年の東北大などで出ています。