1

問題のページへ

$A=(a+b)^p$，$B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ に対して，$\dfrac{b}{a}=x$ とおくと，$x>0$ として，

$$A=a^p(1+x)^p,\ B=2^{p-1}(a^p+a^px^p)=a^p\cdot 2^{p-1}(1+x^p)$$

すると，$A-B=a^p\left\{(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)\right\}$

ここで，$f(x)=(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)$ とおくと，

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-2^{p-1}\cdot px^{p-1}=p\left\{(1+x)^{p-1}-(2x)^{p-1}\right\}$$

(i)　$p-1>0$　($p>1$) のとき

$f'(x)>0 \iff (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \iff 1+x>2x \iff 0<x<1$

$f'(x)<0 \iff (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \iff 1+x<2x \iff 1<x$

$f(x)$ の値の増減は右図のようになり，

$f(x)\leqq 0$

よって，$A\leqq B$（等号は $a=b$ のとき成立）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	0	↘

(ii)　$p-1=0$　($p=1$) のとき

$f(x)=(1+x)-2^0(1+x)=0$ より，$A=B$

(iii)　$p-1<0$　($0<p<1$) のとき

$f'(x)>0 \iff (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \iff 1+x<2x \iff 1<x$

$f'(x)<0 \iff (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \iff 1+x>2x \iff 0<x<1$

$f(x)$ の値の増減は右図のようになり，

$f(x)\geqq 0$

よって，$A\geqq B$（等号は $a=b$ のとき成立）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

(i)(ii)(iii)をまとめて，

$p>1$ かつ $a\neq b$ のとき $A<B$，また $0<p<1$ かつ $a\neq b$ のとき $A>B$，さらにこれらの場合以外の $p=1$ または $a=b$ のとき $A=B$

[解 説]

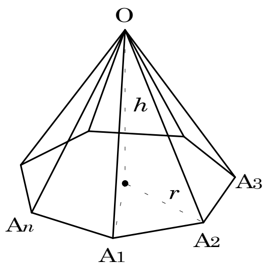
A も B も a と b についての p 次式で，しかも定数項が 0 なので，a と b の比を考えて文字を減らしました。この常套手段で結論が導けます。

© 電送数学舎

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　底面の正 n 角形の面積を S, 外接円の半径を r とし, 正 n 角錐の高さを h とすると, 条件より,



$$r^2+h^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$S=\left(\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)\times n=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\cdots②$$

よって, 正 n 角錐の体積を V とすると, ①②より,

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{6}nr^2h\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{6}n(1-h^2)h\sin\frac{2\pi}{n}$$

$f(h)=(1-h^2)h$ とおくと, ①より,

$0<h<1$ で, $f'(h)=1-3h^2$

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$		＋	0	－	
$f(h)$		↗		↘	

右表より, $h=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $f(h)$ は最大値

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。

よって, V の最大値 V_n は, $V_n=\frac{1}{6}n\frac{2}{9}\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{\sqrt{3}}{27}n\sin\frac{2\pi}{n}$

(2)　(1)より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{\sqrt{3}}{27}\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{\sqrt{3}}{27}\lim_{n\to\infty}2\pi\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$

[解　説]

本問のような問題が出されたのは, あっさり解ける問題も必要ということでしょうか。そのためか, 今年は出題数が 1 つ増加しました。

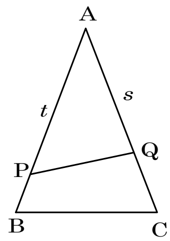
© 電送数学舎

$\boxed{3}$

問題のページへ

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=a$とすると，三角形の形成条件より$0<a<2$となる。

(i)　線分の両端がともに等辺上にあるとき



右図のように2点P, Qを設定し，$\mathrm{AP}=t$，$\mathrm{AQ}=s$ $(0<t\leqq 1,\ 0<s\leqq 1)$として，$\triangle\mathrm{ABC}=2\triangle\mathrm{APQ}$のときを考える。

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin A=2\cdot\frac{1}{2}ts\sin A,\ 2ts=1\cdots\cdots\cdots①$$

余弦定理より，$\cos A=\dfrac{1+1-a^2}{2\cdot 1\cdot 1}=1-\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots②$

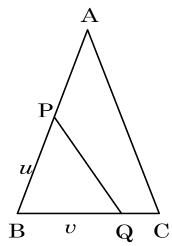
①②より，$\mathrm{PQ}^2=t^2+s^2-2ts\cos A=t^2+\dfrac{1}{4t^2}-1+\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots③$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$t^2+\dfrac{1}{4t^2}\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\dfrac{1}{4t^2}}=1$

等号は$t^2=\dfrac{1}{4t^2}$のとき成立し，$0<t\leqq 1$を満たすのは$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のときとなる。このとき①より，$s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$となり，$0<s\leqq 1$を満たす。

以上より，PQ^2の最小値m_1は③より，$m_1=1-1+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

(ii)　線分の両端が一方は等辺上で他方は底辺上にあるとき



右図のように2点P, Qを設定し，$\mathrm{BP}=u$，$\mathrm{BQ}=v$ $(0<u\leqq 1,\ 0<v\leqq a)$として，$\triangle\mathrm{BAC}=2\triangle\mathrm{BPQ}$のときだけを考えても一般性は失われない。

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a\cdot\sin B=2\cdot\frac{1}{2}uv\sin B,\ 2uv=a\cdots\cdots\cdots④$$

このとき，$\cos B=\dfrac{\mathrm{BC}}{2\mathrm{AB}}=\dfrac{a}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$\mathrm{PQ}^2=u^2+v^2-2uv\cos B=u^2+\dfrac{a^2}{4u^2}-\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$

ここで，$0<v\leqq a$なので④から$0<\dfrac{a}{2u}\leqq a$，すなわち$\dfrac{1}{2}\leqq u$となり，$0<u\leqq 1$と合わせて$\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 1$となる。

さて，$u^2=x$とおき，$f(x)=x+\dfrac{a^2}{4x}$を考える。

$$f'(x)=1-\frac{a^2}{4x^2}=\frac{(2x-a)(2x+a)}{4x^2}$$

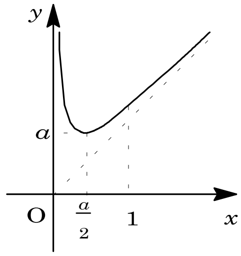
x	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	a	$\nearrow$

$\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 1$より，$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 1$

また, $0<a<2$から，$0<\dfrac{a}{2}<1$

© 電送数学舎

(ii-i)　$\dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{a}{2}$　$\left(\dfrac{1}{2} \leqq a < 2\right)$のとき



$f(x)$の最小値は$f\left(\dfrac{a}{2}\right) = a$

このときPQ^2は最小値m_2をとり，⑥より

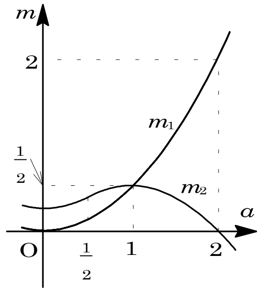
$$m_2 = a - \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}$$

(ii-ii)　$\dfrac{a}{2} < \dfrac{1}{4}$　$\left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$のとき

$f(x)$の最小値は$f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4} + a^2$

このときPQ^2は最小値m_2をとり，⑥より

$$m_2 = \frac{1}{4} + a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4}$$



(i)(ii)をまとめて, aとPQ^2の最小値mとの関係をグラフにすると，右図のようになる。

これより，$0 < a < 1$のとき$m = m_1 = \dfrac{a^2}{2}$，$1 \leqq a < 2$のとき$m = m_2 = a - \dfrac{a^2}{2}$

よって, PQの最小値は，$0 < a < 1$のとき$\sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$1 \leqq a < 2$のとき$\sqrt{a - \dfrac{a^2}{2}}$

[解 説]

(ii)の場合も(i)の場合と同じく，まず相加平均と相乗平均の関係を用いて最小値m_2を求めようとしました。ところが，等号成立条件が「あやしい」と感じましたので，関数を対応させて丁寧に解いてみました。最終的には，杞憂に過ぎなかったものの，解は長くなってしまいました。

© 電送数学舎

4

問題のページへ

$I_n=\int_0^1 t^n e^t dt$ とおくと，部分積分により，

$$I_n=\left[t^n e^t\right]_0^1-n\int_0^1 t^{n-1}e^t dt=e-nI_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2k+1)(2k-1)!}=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(2k+1)!}$

$$=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

証明すべき式 $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!$ ……(＊)は，②より，

$$(＊)\ \Leftrightarrow\ \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)=1\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\dfrac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}=J_n$ とおくと，

$$③\ \Leftrightarrow\ J_n=1+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，①から，

$$J_{n+1}=\frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e-(2n+1)I_{2n}}{(2n+1)!}=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{I_{2n}}{(2n)!}$$

$$=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{e-2nI_{2n-1}}{(2n)!}=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{e}{(2n)!}+\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=J_n+e\left(\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{(2n)!}\right)$$

$n\geqq 2$ で，$\displaystyle J_n=J_1+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)$

ここで，$\displaystyle J_1=I_1=\int_0^1 te^t dt=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt=e-(e-1)=1$

よって, $n\geqq 2$ で④は成立するので, (＊)は成立する。

[解 説]

最初は③式を数学的帰納法で証明しました。しかし②式を眺めていると，直接的な証明が可能ではないかと思えてきました。それで考え直して書いたのが上の解です。

© 電送数学舎

5

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}_n(w_n)$とすると，$w_0=0$，$w_1=1+i$となる。また$\mathrm{P}_\infty(w_\infty)$とおく。

ここで，$\alpha=\dfrac{2}{3}\left(\cos\dfrac{1}{3}\pi+i\sin\dfrac{1}{3}\pi\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}$とすると，条件より，

$$w_n-w_{n-1}=\alpha(w_{n-1}-w_{n-2})$$

$$w_{n+1}-w_n=(w_1-w_0)\alpha^n=(1+i)\alpha^n$$

$n\geqq 1$で，$w_n=w_0+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)\alpha^k=(1+i)\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

$|\alpha|=\dfrac{2}{3}<1$より，$n\to\infty$のとき$\alpha^n\to 0$，$w_n\to w_\infty$なので，

$$w_\infty=\frac{1+i}{1-\alpha}=\frac{1+i}{1-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}}=\frac{3(1+i)}{2-\sqrt{3}i}=\frac{3(2-\sqrt{3})+3(2+\sqrt{3})i}{7}$$

(2)　$\mathrm{Q}_n(z_n)$とすると，$z_0=0$，$z_1=z$となる。また$\mathrm{Q}_\infty(z_\infty)$とおく。

ここで，$\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{1}{6}\pi+i\sin\dfrac{1}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$とすると，条件より，

$$z_n-z_{n-1}=\beta(z_{n-1}-z_{n-2})$$

$$z_{n+1}-z_n=(z_1-z_0)\beta^n=z\beta^n$$

$n\geqq 1$で，$z_n=z_0+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z\beta^k=z\frac{1-\beta^n}{1-\beta}$

$|\beta|=\dfrac{1}{2}<1$より，$n\to\infty$のとき$\beta^n\to 0$，$z_n\to z_\infty$なので，

$$z_\infty=\frac{z}{1-\beta}=\frac{z}{1-\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}}=\frac{4z}{(4-\sqrt{3})-i}$$

条件より，$z_\infty=w_\infty$なので，$\dfrac{4z}{(4-\sqrt{3})-i}=\dfrac{3(2-\sqrt{3})+3(2+\sqrt{3})i}{7}$

よって，$z=\dfrac{3}{28}\left\{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i\right\}\left\{(4-\sqrt{3})-i\right\}$

$$=\frac{3(13-5\sqrt{3})+9(1+\sqrt{3})i}{28}$$

[解 説]

複素数列の極限に関する有名頻出問題です。昨年も上智大・理工で類題が出ています。

© 電送数学舎