1

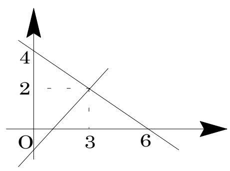
問題のページへ

$ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y=8$ は $a\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)+4y-8=0$ と変形すると，a が正のどんな値をとっても $x-\dfrac{3}{2}y=0$ かつ $4y-8=0$ となる点，すなわち $(x,\ y)=(3,\ 2)$ を通る直線を表し，x 切片 $\dfrac{8}{a}$，y 切片 $\dfrac{16}{8-3a}$ $\left(a\neq\dfrac{8}{3}\right)$ である。また，$ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y\leqq 8$ の表す領域は，境界線 $ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y=8$ によって分けられる平面のうち原点を含む領域である。

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+3y\leqq 12$ の表す領域は，3 点 $(0,\ 0)$，$(6,\ 0)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする三角形の内部または周上である。

ここで，$x+y=k$ とおき，この直線と与えられた領域とが共有点をもつ k の範囲を求める。

(i)　$8-3a<0$ $\left(a>\dfrac{8}{3}\right)$ のとき



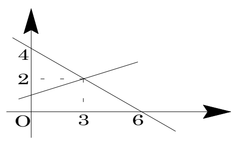
$x+y=k$ は $(x,\ y)=(3,\ 2)$ で最大値 5 をとる。

(ii)　$8-3a=0$ $\left(a=\dfrac{8}{3}\right)$ のとき

$x+y=k$ は $(x,\ y)=(3,\ 2)$ で最大値 5 をとる。

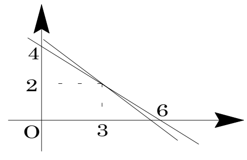
(iii)　$8-3a>0$ $\left(0<a<\dfrac{8}{3}\right)$ のとき

(iii-i)　$\dfrac{16}{8-3a}\leqq 4$ $\left(0<a\leqq\dfrac{4}{3}\right)$ のとき



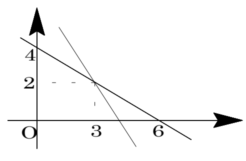
$x+y=k$ は $(x,\ y)=(6,\ 0)$ で最大値 6 をとる。

(iii-ii)　$4<\dfrac{16}{8-3a}<5$ $\left(\dfrac{4}{3}<a<\dfrac{8}{5}\right)$ のとき



$x+y=k$ は $(x,\ y)=\left(\dfrac{8}{a},\ 0\right)$ で最大値 $\dfrac{8}{a}$ をとる。

(iii-iii)　$\dfrac{16}{8-3a}\geqq 5$ $\left(\dfrac{8}{5}\leqq a<\dfrac{8}{3}\right)$ のとき



$x+y=k$ は $(x,\ y)=(3,\ 2)$ で最大値 5 をとる。

以上より，

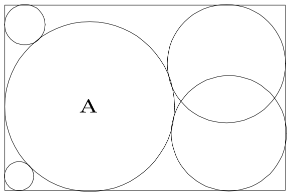
$$f(a)=\begin{cases}6 & \left(0<a\leqq\dfrac{4}{3}\right)\\ \dfrac{8}{a} & \left(\dfrac{4}{3}<a<\dfrac{8}{5}\right)\\ 5 & \left(\dfrac{8}{5}\leqq a\right)\end{cases}$$

[解　説]

領域と最大・最小という頻出題です。直線 $ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y=8$ が定点 $(3,\ 2)$ を通過し，その点が直線 $2x+3y=12$ 上にあることを見つけるのがポイントです。

2　　問題のページへ

(1)　右図のように円C_1，C_2，C_3，C_4をAに外接し,Rの２辺と接するように設定し，その半径をそれぞれr_1，r_2，r_3，r_4とする。



まず, 円Aが性質(P)をもつことより,

$0<2x<a$ ………①

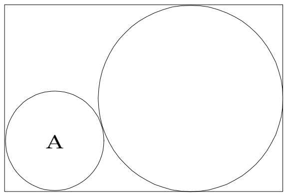
①の範囲で, 性質(P)をみたす円C_1，C_2は存在し，xが増加するとき，r_1は単調増加，r_2は単調減少する。

また$2x=a$のとき，$r_1=r_2$となるので，①の範囲で

$r_1<r_2$ ………②

さて$2a>b>a$から，C_3とC_4が一致し，$r_3=r_4=\frac{a}{2}$のときのAの半径をx_0とするとき，性質(P)をみたす円C_3，C_4が存在する条件は，$x>x_0$ ………③

①③より，$x_0<x<\frac{a}{2}$



ここで，三平方の定理より，

$$\left(x_0+\frac{a}{2}\right)^2=\left(b-\frac{a}{2}-x_0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-x_0\right)^2$$

$$ax_0=\left(b-\frac{a}{2}-x_0\right)^2-ax_0$$

$$x_0{}^2-(a+2b)x_0+b^2-ab+\frac{a^2}{4}=0$$

$$x_0=\frac{a+2b\pm\sqrt{(a+2b)^2-4b^2+4ab-a^2}}{2}=\frac{a+2b\pm2\sqrt{2ab}}{2}$$

$x_0<\frac{a}{2}$より，$x_0=\frac{a+2b-2\sqrt{2ab}}{2}=\frac{(\sqrt{2b}-\sqrt{a})^2}{2}$

以上より，$\frac{(\sqrt{2b}-\sqrt{a})^2}{2}<x<\frac{a}{2}$

(2)　(1)と同様にして,

$(x+r_4)^2=(b-r_4-x)^2+(r_4-x)^2$から，$r_4{}^2-(2x+2b)r_4+b^2-2bx+x^2=0$

$r_4<b$より，$r_4=x+b-2\sqrt{bx}=(\sqrt{b}-\sqrt{x})^2$

またa, bを交換すると$r_2=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$となるので，$a<b$から$r_2<r_4$ ………④

さらに，$(x+r_3)^2=(b-r_3-x)^2+(a-r_3-x)^2$

$$r_3{}^2-(2x-2a-2b)r_3+a^2-2ax+b^2-2bx+x^2=0$$

$r_3<\frac{a}{2}$より，$r_3=a+b-x-\sqrt{2ab}$

ここで，$r_3-r_4=a-2x-\sqrt{2ab}+2\sqrt{bx}=(\sqrt{a}-\sqrt{2x})(\sqrt{a}+\sqrt{2x}-\sqrt{2b})$

(1)から，$(\sqrt{2b}-\sqrt{a})^2<2x<a$なので，$\sqrt{a}-\sqrt{2x}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{2x}-\sqrt{2b}>0$

よって，$r_3>r_4$ ………⑤

②④⑤より $r_1 < r_2 < r_4 < r_3$ となり，円 B は円 C_4 となる。

求める面積を S とすると，

$$S = \pi(x^2 + {r_4}^2) = \pi\left\{x^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{x})^4\right\}$$

$\dfrac{S}{\pi} = f(x)$ とおくと，

$$f'(x) = 2x + 4(\sqrt{b} - \sqrt{x})^3 \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}}\left\{(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{b} - \sqrt{x})^3\right\}$$

$f'(x) > 0$ とすると，$\sqrt{x} > \sqrt{b} - \sqrt{x}$ から $x > \dfrac{b}{4}$

ここで，$2a > b > a$ より，$\dfrac{b}{4} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{4}(b - 2a) < 0$，

$$\frac{b}{4} - \frac{(\sqrt{2b} - \sqrt{a})^2}{2} = -\frac{1}{4}(3b - 4\sqrt{2ab} + 2a) = -\frac{1}{4}(3\sqrt{b} - \sqrt{2a})(\sqrt{b} - \sqrt{2a}) > 0$$

よって，$\dfrac{(\sqrt{2b} - \sqrt{a})^2}{2} < \dfrac{b}{4} < \dfrac{a}{2}$ となる。

x	$\dfrac{(\sqrt{2b} - \sqrt{a})^2}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{b}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{a}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

これより，$x = \dfrac{b}{4}$ のとき $f(x)$ は最小，すなわち S は最小となる。

このとき，$S = \pi\left\{\dfrac{b^2}{16} + \left(\dfrac{\sqrt{b}}{2}\right)^4\right\} = \dfrac{\pi}{8}b^2$

[解 説]

(1)(2)とも，どこまでどのように答案を書けば完全といえるのか迷う問題です。特に(2)は，円 B が円 C_4 となることを明らかとして解を書いてもよいのかどうか苦慮してしまいます。上の解ではこの点にも触れるように書きましたが，書きすぎかもしれません。なお，実戦的には少々の減点は覚悟して，答案を大雑把に書いた方がよいのではないかと思えます。

3

問題のページへ

(1)　$f_0(t)=t$, $f_1(t)=f(f_0(t))=\dfrac{2t-1}{t}$, $f_2(t)=f(f_1(t))=\dfrac{2\cdot\dfrac{2t-1}{t}-1}{\dfrac{2t-1}{t}}=\dfrac{3t-2}{2t-1}$

これより，$t\neq\dfrac{n-1}{n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ならば $f_n(t)$ は定義でき，

$f_n(t)=\dfrac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}$ となると推測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

$t\neq 0$ で $f_1(t)=\dfrac{2t-1}{t}$ より成立。

(ii)　$n=k$ のとき

$f_k(t)=\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}$　$\left(t\neq\dfrac{k-1}{k}\right)$と仮定するとき，$t\neq\dfrac{k}{k+1}$ ならば，

$$f_{k+1}(t)=\frac{2\cdot\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}-1}{\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}}=\frac{2(k+1)t-2k-kt+(k-1)}{(k+1)t-k}=\frac{(k+2)t-(k+1)}{(k+1)t-k}$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n で $t\neq\dfrac{n-1}{n}$ ならば，$f_n(t)=\dfrac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}$

また同様に考えて，この命題の裏の命題も正しいので，逆の命題も成立する。

以上より，$f_n(t)$ が定義できる条件は，$t\neq\dfrac{n-1}{n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$

(2)　$f_n(t)-1=\dfrac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}-1=\dfrac{t-1}{nt-(n-1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{nt-(n-1)}$

$$I_n=n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt=\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{n-\frac{n}{nt-(n-1)}\right\}dt$$

$$=\Big[nt-\log|nt-(n-1)|\Big]_a^{a+\frac{1}{n}}=1-\log\left|\frac{(a-1)n+2}{(a-1)n+1}\right|$$

$a=1$ のとき，$I_n=1-\log 2$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=1-\log 2$

$a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\log\left|\frac{a-1+\frac{2}{n}}{a-1+\frac{1}{n}}\right|\right\}=1-\log 1=1$

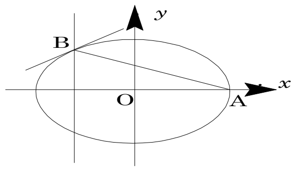
[解 説]

前問と同じく解の書きにくい問題です。まず(2)の設問から，$f_n(t)$ の形は決まるだろうと予測ができます。実際そのとおりになるのですが，(1)の題意に沿った答案としてまとめるときに，どこまで書けばよいのか判断に苦しみます。上ではやや乱暴に書いてみました。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　接線 l は $\dfrac{px}{a^2}+qy=1$ から，その法線ベクトルが $\dfrac{1}{a^2}(p,\ a^2q)$ となるので，方向ベクトル $\vec{l}$ は，$\vec{l}=(a^2q,\ -p)$ とおくことができる。



また，直線 $x=p$ の方向ベクトルを $\vec{u}=(0,\ 1)$ とする。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(a-p,\ -q)$ なので，条件より，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}+\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=k\vec{l}\quad(k\text{ は実数})$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a-p)^2+(-q)^2}}(a-p,\ -q)+(0,\ 1)=k(a^2q,\ -p)$$

$$\frac{a-p}{\sqrt{(a-p)^2+(-q)^2}}=ka^2q\cdots\cdots①\qquad \frac{-q}{\sqrt{(a-p)^2+(-q)^2}}+1=-kp\cdots\cdots②$$

①×p＋②×a^2q より

$$p(a-p)-a^2q^2+a^2q\sqrt{(a-p)^2+q^2}=0$$

ここで $\dfrac{p^2}{a^2}+q^2=1$ より，$q^2=1-\dfrac{p^2}{a^2}=\dfrac{(a-p)(a+p)}{a^2}$ を代入してまとめると，

$$aq\sqrt{(a-p)^2+\frac{(a-p)(a+p)}{a^2}}=a-p$$

$q>0$　$a-p>0$ から，両辺を 2 乗して，まとめていくと，

$$a^2\cdot\frac{(a-p)(a+p)}{a^2}\left\{(a-p)^2+\frac{(a-p)(a+p)}{a^2}\right\}=(a-p)^2$$

$$(a+p)\left\{(a-p)+\frac{a+p}{a^2}\right\}=1 \text{ より，}(a^2-1)p^2-2ap-a^4=0\cdots\cdots③$$

③の左辺を $f(p)$ とおくと，$f(-a)=a^2>0$，$f(a)=-3a^2<0$ で，$-a<p<a$ より，③の解は $p=\dfrac{a-\sqrt{a^6-a^4+a^2}}{a^2-1}=\dfrac{a-a\sqrt{a^4-a^2+1}}{a^2-1}$

(2)　$$\lim_{a\to1}p=\lim_{a\to1}\frac{a(1-\sqrt{a^4-a^2+1})}{a^2-1}=\lim_{a\to1}\frac{a\cdot a^2(1-a^2)}{(a^2-1)(1+\sqrt{a^4-a^2+1})}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{1-\sqrt{a^4-a^2+1}}{a^2-1}=\lim_{a\to\infty}\frac{\dfrac{1}{a^2}-\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^4}}}{1-\dfrac{1}{a^2}}=-1$$

[解 説]

角の二等分線の問題です。ベクトルか tan の加法定理かを利用しますが，上の解では前者を用いました。昨年，放物線を題材として，北大で類題が出ています。