1

問題のページへ

(1) 原点を通る直線の方程式を，$y=mx$ または $x=0$ と表す。

(i) $y=mx$ のとき

この直線上の任意の点を $(t,\ mt)$ とすると，f_n によって移される点は，

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-n+m)t \\ (-n^2-n+mn+2m)t \end{pmatrix}$$

この点が，$y=mx$ 上にあることより，$(-n^2-n+mn+2m)t=m(1-n+m)t$

任意の t に対して成立するので，

$$-n^2-n+mn+2m=m(1-n+m),\quad m^2-(2n+1)m+n(n+1)=0$$

すると，$(m-n)(m-n-1)=0$ から，$m=n,\ n+1$

(ii) $x=0$ のとき

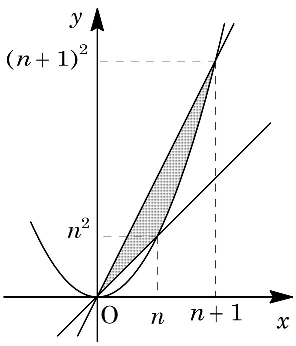
この直線上の任意の点を $(0,\ t)$ とすると，f_n によって移される点は，

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 \\ -n(n+1) & n+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ (n+2)t \end{pmatrix}$$

この点は，$t\neq 0$ のとき $x=0$ 上にないので，条件に適さない。

(i)(ii)より，求める 2 直線の方程式は，$y=nx$，$y=(n+1)x$ である。

(2) 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=nx$，$y=(n+1)x$ の原点以外の交点は，それぞれ $(n,\ n^2)$，$(n+1,\ (n+1)^2)$ となり，右図の網点部の面積 S_n は，



$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(n+1)(n+1)^2-\frac{1}{2}n\cdot n^2-\int_n^{n+1}x^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}(n+1)^3-\frac{1}{2}n^3-\left\{\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{3}n^3\right\} \\ &= \frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{6}n^3=\frac{1}{6}(3n^2+3n+1) \end{aligned}$$

(3) $S_n-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}(n^2+n)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ より，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n-\frac{1}{6}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2 \end{aligned}$$

[解 説]

不変直線を題材にした基本問題です。計算量も少なめです。

2

問題のページへ

(1)　条件より，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t-x\sin 2t\right|dt$ を変形して，

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t-2x\sin t\cos t\right|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\left|1-2x\sin t\right|dt$$

(i)　$2x<1\left(x<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(1-2x\sin t)dt=\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-x$$

(ii)　$2x\geqq 1\left(x\geqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

まず，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$1=2x\sin t$ である t はただ 1 つ存在し，これを $t=\alpha$ とおくと，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2x}$ となり，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\alpha}\cos t(1-2x\sin t)dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}-\cos t(1-2x\sin t)dt\\&=\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_0^{\alpha}-\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\sin\alpha-x\sin^2\alpha-(1-x)+\sin\alpha-x\sin^2\alpha\\&=2\cdot\frac{1}{2x}-2x\cdot\frac{1}{4x^2}-1+x=x+\frac{1}{2x}-1\end{aligned}$$

すると，$f'(x)=1-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{2x^2-1}{2x^2}$ から，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

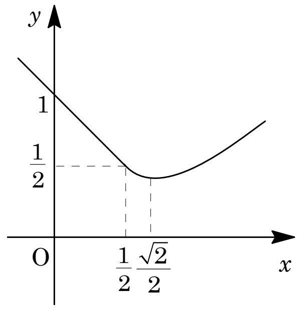
x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$

(i)(ii)より，$f(x)$ の最小値は,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x+\frac{1}{2x}-1\right)dx\\&=\frac{3}{8}+\Big[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log x-x\Big]_{\frac{1}{2}}^1\\&=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$



[解 説]

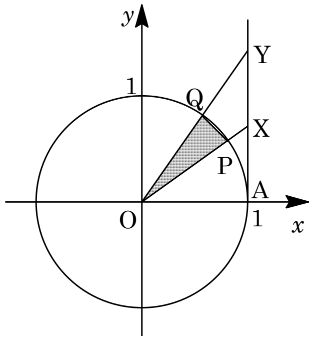
昨年と同様な絶対値の付いた関数の定積分です。(1)の最小値については，相加平均と相乗平均の関係を利用する手もあります。

3

問題のページへ

$t>0$ として，X(1, t) とおくと，条件より，Y(1, kt) となる。ここで，$\angle AOX=\alpha$，$\angle AOY=\beta$ とおくと，

$$\tan\alpha=t,\ \tan\beta=kt\ \cdots\cdots\text{①}$$



さて，△OPQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)\ \cdots\cdots\text{②}$$

S が最大となるのは，$0<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$ から $\beta-\alpha$ が最大となるときである。すなわち，$\tan(\beta-\alpha)$ が最大値をとる場合である。

そこで，$f(t)=\tan(\beta-\alpha)$ とおくと，①から，$f(t)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{(k-1)t}{1+kt^2}$

$$f'(t)=\frac{(k-1)\{(1+kt^2)-t\cdot 2kt\}}{(1+kt^2)^2}$$
$$=\frac{(k-1)(1-kt^2)}{(1+kt^2)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

すると，$f(t)$ の値は右表のように増減し，$t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のときに最大となる。よって，最大値は，

$$\tan(\beta-\alpha)=f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\frac{(k-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}}{1+k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{k-1}{2\sqrt{k}}$$

このとき，$\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{\sqrt{(2\sqrt{k})^2+(k-1)^2}}=\dfrac{k-1}{k+1}$ となり，②から S の最大値は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{k+1}=\frac{k-1}{2(k+1)}$$

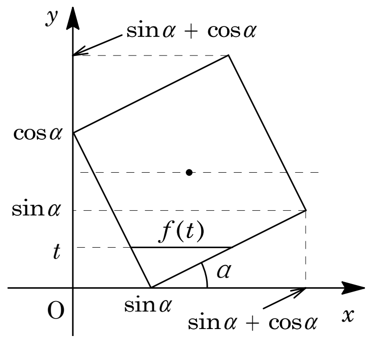
[解 説]

図形量の最大値を問う基本題です。θ が鋭角のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ は，ともに単調増加する関数という事実を利用しています。

4

問題のページへ

(1)　1 辺の長さが 1 である正方形 D を，右図のように配置し，D を直線 $y=k$ のまわりに回転させて得られる回転体を考える。ここで，D の対角線の交点が $\left(\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2},\ \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}\right)$ であるので，対称性から $0\leqq k\leqq\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$ とし，さらに $0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$ としても一般性を失わない。



さて，直線 $y=t$ $(0\leqq t\leqq\sin\alpha+\cos\alpha)$ が，D によって切り取られる線分の長さを $f(t)$ とすると，

(a)　$0\leqq t\leqq\sin\alpha$ のとき　$f(t):\dfrac{1}{\cos\alpha}=t:\sin\alpha$ より，$f(t)=\dfrac{t}{\sin\alpha\cos\alpha}$

(b)　$\sin\alpha\leqq t\leqq\cos\alpha$ のとき　$f(t)$ は定数であり，$f(t)=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

(c)　$\cos\alpha\leqq t\leqq\sin\alpha+\cos\alpha$ のとき

$$f(t):\frac{1}{\cos\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha-t):\sin\alpha \text{ より，} f(t)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-t}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

以下，正方形 D の直線 $y=k$ まわりの回転体の体積を考える。

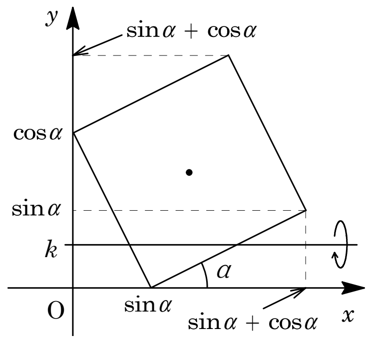
(i)　$k=0$ のとき

このときの回転体の体積を V_0 とすると，$V_0=\displaystyle\int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)\,dt$

(ii)　$0<k\leqq\sin\alpha$ のとき

このときの回転体の体積を V_1 とすると，

$$\begin{aligned}V_1&=\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi(t-k)f(t)\,dt\\&<\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)\,dt\\&<\int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)\,dt\end{aligned}$$



よって，$V_1<V_0$ である。

(iii)　$\sin\alpha\leqq k\leqq\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$ のとき

このときの回転体の体積を V_2 とすると，

$$\begin{aligned}V_2&\leqq\int_0^k 2\pi(k-t)f(t)\,dt+\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi(t-k)f(t)\,dt\\&<\int_0^k 2\pi(k-t)f(t)\,dt+\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)\,dt\ \cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで，$I=\displaystyle\int_0^k tf(t)\,dt-\int_0^k(k-t)f(t)\,dt$ とおくと，

$$I=\int_0^k(2t-k)f(t)dt=\int_0^{\sin\alpha}\frac{(2t-k)t}{\sin\alpha\cos\alpha}dt+\int_{\sin\alpha}^k\frac{2t-k}{\cos\alpha}dt$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\Big[\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}kt^2\Big]_0^{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\Big[t^2-kt\Big]_{\sin\alpha}^k$$
$$=\frac{1}{\cos\alpha}\Big(\frac{2}{3}\sin^2\alpha-\frac{1}{2}k\sin\alpha\Big)-\frac{1}{\cos\alpha}(\sin^2\alpha-k\sin\alpha)$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Big(-\frac{1}{3}\sin\alpha+\frac{1}{2}k\Big)=\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}\Big(-\frac{2}{3}\sin\alpha+k\Big)>0$$

よって，$I>0$ から，$\displaystyle\int_0^k(k-t)f(t)dt<\int_0^k tf(t)dt$ となり，

$$\int_0^k 2\pi(k-t)f(t)dt<\int_0^k 2\pi tf(t)dt\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$\displaystyle V_2<\int_0^k 2\pi tf(t)dt+\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)dt=\int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)dt$

よって，$V_2<V_0$ である。

(i)〜(iii)より，回転体の体積は，軸が D と唯 1 点で交わるときに最大となる。

(2)　(1)より，$\displaystyle V_0=2\pi\int_0^{\sin\alpha}tf(t)dt+2\pi\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}tf(t)dt+2\pi\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha}tf(t)dt$

ここで，$\displaystyle I_1=\int_0^{\sin\alpha}tf(t)dt=\int_0^{\sin\alpha}\frac{t^2}{\sin\alpha\cos\alpha}dt=\frac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}$

$$I_2=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}tf(t)dt=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\frac{t}{\cos\alpha}dt=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$$

さらに，$s=t-\cos\alpha$ とおくと，

$$I_3=\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha}tf(t)dt=\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha}\frac{t(\sin\alpha+\cos\alpha-t)}{\sin\alpha\cos\alpha}dt$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\sin\alpha}(s+\cos\alpha)(\sin\alpha-s)ds$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\sin\alpha}\{-s^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)s+\sin\alpha\cos\alpha\}ds$$
$$=-\frac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}+\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)\sin\alpha}{2\cos\alpha}+\sin\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{6\cos\alpha}+\frac{1}{2}\sin\alpha$$

よって，$V_0=2\pi(I_1+I_2+I_3)=\pi(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{2}\pi\sin\Big(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\Big)$

すると，$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より，V_0 は $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}\pi$ をとる。

また，$\alpha=0$ のとき，回転体の体積の最大値は，$\pi\cdot1^2\cdot1=\pi$ となる。

以上より，求める回転体の体積の最大値は，$\sqrt{2}\pi$ である。

[解 説]

一瞥した瞬間，難問というのがわかります。いわゆる円筒分割を利用した解答例ですが，評価の甘い箇所と辛い箇所が混在しています。