$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ に対して，

$$f'(x)=\sin x-\sin x-x\cos x=-x\cos x$$

$0<x<\pi$ において，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)=0$ は唯一の解をもつ。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	2

(2)　$f(x)=0$ の解を $x=\alpha$ とすると，$1-\cos\alpha=\alpha\sin\alpha$ ………(＊)

$$J=\int_0^\pi|f(x)|dx=\int_0^\alpha -f(x)dx+\int_\alpha^\pi f(x)dx$$

ここで，$F(x)=\int f(x)dx$ とおくと，

$$F(x)=\int(1-\cos x-x\sin x)dx=x-\sin x+x\cos x-\int\cos x\,dx$$
$$=x-2\sin x+x\cos x+C$$

よって, (＊)を用いると,

$$J=-\left[F(x)\right]_0^\alpha+\left[F(x)\right]_\alpha^\pi=F(0)+F(\pi)-2F(\alpha)$$
$$=-2\alpha+4\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha=-2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)+4\sin\alpha$$
$$=-2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+4\sin\alpha=2\sin\alpha$$

(3)　(1)より，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるが,

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1-\frac{3}{4}\pi\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1.4+1-\frac{3}{4}\times3.2\right)=0$$

これより，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$ となり,

$$J=2\sin\alpha>2\sin\frac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$$

[解 説]

微積分の標準的な問題です。誘導も細かく付けられています。

2

問題のページへ

(1)　xを正の実数として，$x=\left[\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\right]$……(＊)が解をもつ条件は,

$$x\leqq\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)<x+1\ （x\text{は正の整数}）\cdots\cdots\cdots①$$

①より，$2x^2\leqq x^2+a$から，$x\leqq\sqrt{a}$

また，$x^2+a<2x^2+2x$から$x^2+2x-a>0$となり，$x>\sqrt{a+1}-1$より，①は,

$$\sqrt{a+1}-1<x\leqq\sqrt{a}\ （x\text{は正の整数}）\cdots\cdots\cdots②$$

$a=7$のとき，②から$\sqrt{8}-1<x\leqq\sqrt{7}$となり，解は$x=2$

$a=8$のとき，②から$3-1<x\leqq\sqrt{8}$となり，解なし

$a=9$のとき，②から$\sqrt{10}-1<x\leqq 3$となり，解は$x=3$

(2)　$a=1$のとき，②から$\sqrt{2}-1<x\leqq 1$となり，解は$x=1$

$a=2$のとき，②から$\sqrt{3}-1<x\leqq\sqrt{2}$となり，解は$x=1$

$a=3$のとき，②から$2-1<x\leqq\sqrt{3}$となり，解なし

$a=4$のとき，②から$\sqrt{5}-1<x\leqq 2$となり，解は$x=2$

$a=5$のとき，②から$\sqrt{6}-1<x\leqq\sqrt{5}$となり，解は$x=2$

$a=6$のとき，②から$\sqrt{7}-1<x\leqq\sqrt{6}$となり，解は$x=2$

そこで, (1)の結果と合わせると, (＊)が解をもたないのは，$a=3,\ 8,\ \cdots$となり,

$$a_1=3,\ a_2=8$$

(3)　まず, nを正の整数として,

(i)　$n^2\leqq a<(n+1)^2-1$ ($n\leqq\sqrt{a}$かつ$\sqrt{a+1}-1<n$)のとき

②の整数解は，$x=n$である。

(ii)　$a=(n+1)^2-1$のとき

②に代入すると，$n<x\leqq\sqrt{(n+1)^2-1}$………③

ここで，$\sqrt{(n+1)^2-1}-n=\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}<\dfrac{2n}{n+n}=1$から，③は整数解をもたない。

(i)(ii)より，$a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$となり,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

[解 説]

ガウス記号を題材としたおもしろい問題です。初めに考えた通りを記述しましたので, (2)は冗長な解答例となっています。

3

問題のページへ

(1)　8 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_8\mathrm{C}_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が 3 となる確率は $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{5}{28}$，小さい方が 6 となる確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{28}$ であるので，

$$p(8)=\frac{5}{28}+\frac{2}{28}=\frac{1}{4}$$

(2)　$3k+2$ 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_{3k+2}\mathrm{C}_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が $3l$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ となる確率は，

$$\frac{{}_{3k+2-3l}\mathrm{C}_1}{{}_{3k+2}\mathrm{C}_2}=\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}$$

$l=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ の和をとると，

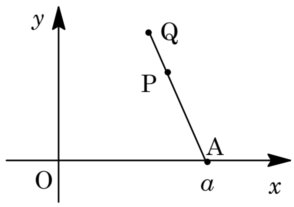
$$p(3k+2)=\sum_{l=1}^{k}\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}=\frac{2}{(3k+2)(3k+1)}\cdot\frac{(3k-1)+2}{2}\cdot k=\frac{k}{3k+2}$$

[解 説]

不思議なぐらい基本的な問題です。なお，(2)の和は，シグマの公式でなく，等差数列の和として計算しています。

4

問題のページへ



半直線 AP 上の点 Q に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおく。

すると，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\leqq 2$ より，$\mathrm{P}(x,\ y)\neq\mathrm{A}(a,\ 0)$ のもとで,

$$0\leqq t\leqq 2$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a+t(x-a),\ ty)$$

$$=(a(1-t)+tx,\ ty)$$

さて，$\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}}\leqq\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}\neq\vec{0}$ ……①のもとで,

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{QP}\leqq\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{AP}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①から，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\neq t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\neq\vec{0}$ から $0<t\leqq 2$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\neq\dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

すると，$\dfrac{1}{t}\geqq\dfrac{1}{2}$ から，$\mathrm{P}(x,\ y)$ は, x 軸上の $x\leqq\dfrac{a}{2}$ の部分には存在しない。

また，②から，$a|1-t||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$，$a^2(1-t)^2\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ となり,

$$a^2(1-t)^2\leqq\{a(1-t)+tx\}^2+t^2y^2,\ (x^2+y^2-2ax)t^2+2axt\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③は，$t=0$ では成立しているので，$0<t\leqq 2$ でつねに成立する条件を求める。

そこで，$0<t\leqq 2$ において，③は,

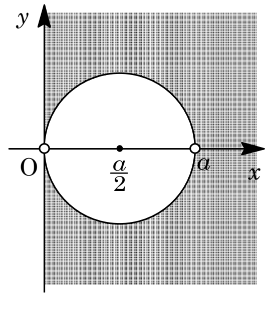
$$(x^2+y^2-2ax)t+2ax\geqq 0$$

$f(t)=(x^2+y^2-2ax)t+2ax$ とおくと，求める条件は,

$$f(0)=2ax\geqq 0,\ f(2)=2x^2+2y^2-2ax\geqq 0$$

まとめると, $x\geqq 0$ かつ $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2\geqq\dfrac{a^2}{4}$

よって，条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在領域 D は，右図の網点部となる。ただし，白丸以外の境界は領域に含む。



[解 説]

問題文に与えられた条件が比の形で書かれているため，取り組みにくい感じがします。なお，点 Q はこの条件を満たす任意の点として解答をしています。