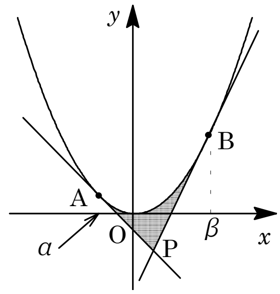
1

問題のページへ



$y=\dfrac{1}{2}x^2$ より $y'=x$ となるので，接点を $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{2}\alpha^2\right)$，$\mathrm{B}\left(\beta,\ \dfrac{1}{2}\beta^2\right)(\alpha<\beta)$ とおくと, A における接線は,

$$y-\frac{1}{2}\alpha^2=\alpha(x-\alpha),\ \ y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして, B における接線は,

$$y=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\alpha-\beta)x-\dfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)=0$

$\alpha<\beta$ より，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

さて, 2 本の接線と放物線で囲まれる図形の面積 S は,

$$S=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2-\alpha x+\frac{1}{2}\alpha^2\right)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left(\frac{1}{2}x^2-\beta x+\frac{1}{2}\beta^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{6}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{6}\Big[(x-\beta)^3\Big]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)^3-\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3$$

ここで, 2 本の接線が直交することより，$\alpha\beta=-1$ となり，$\alpha=-\dfrac{1}{\beta}$ から,

$$S=\frac{1}{24}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3$$

$\alpha<0<\beta$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いて,

$$S=\frac{1}{24}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3\geqq\frac{1}{24}\cdot2^3=\frac{1}{3}$$

等号は $\beta=\dfrac{1}{\beta}$ すなわち $\beta=1$ のとき成立することより, S の最小値は $\dfrac{1}{3}$ である。

[解 説]

センターレベルの微積分の頻出基本問題です。

2

問題のページへ

$(x',\ y')=f(x,\ y)$ とおくと，条件より，

$$x'=ax+(a-2)y \cdots\cdots\cdots ①,\quad y'=(a-2)x+ay \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，点 $(0,\ 1)$ を通る直線 L は，$y=mx+1$ または $x=0$ と表すことができる。

(i)　$L: y=mx+1$ のとき

t を実数として, L 上の点を，$(t,\ mt+1)$ とおくと，①②より，

$$x'=at+(a-2)(mt+1)=(a+am-2m)t+a-2$$

$$y'=(a-2)t+a(mt+1)=(a-2+am)t+a$$

条件より，$y'=mx'+1$ なので，

$$(a-2+am)t+a=m\{(a+am-2m)t+a-2\}+1$$

任意の t に対して成立することより，

$$a-2+am=m(a+am-2m) \cdots\cdots\cdots ③,\quad a=m(a-2)+1 \cdots\cdots\cdots ④$$

③より，$a-2=am^2-2m^2$，$(a-2)(m^2-1)=0$

$a=2$ のとき，④は $a=1$ となり不適である。

$m=1$ のとき，④は $a=a-2+1$ となり成立しない。

$m=-1$ のとき，④は $a=-a+2+1$ となり，$a=\dfrac{3}{2}$ である。

(ii)　$L: x=0$ のとき

s を実数として, L 上の点を，$(0,\ s)$ とおくと，①より，

$$x'=(a-2)s$$

条件より，$x'=0$ なので，$(a-2)s=0$

任意の s に対して成立することより，$a=2$ である。

(i)(ii)より，$a=\dfrac{3}{2}$，2 である。

[解　説]

1 次変換における不変直線を題材にした頻出問題です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

$1 \leqq m \leqq 2N$……①，$1 \leqq n \leqq 2N$……②において，方程式$x^2 - nx + m = 0$の実数解を$x = \alpha,\ \beta$とおく。N以上の解を少なくとも1つもつことより，

(a)　$N < \alpha \leqq \beta$のとき　$\dfrac{n}{2} > N$が必要となるが，②に反する。

(b)　$\alpha < N < \beta$のとき　条件は，$N^2 - nN + m < 0$より，$m < Nn - N^2$

(c)　$N = \alpha \leqq \beta$または$\alpha \leqq \beta = N$のとき

条件は，$N^2 - nN + m = 0$，$m = Nn - N^2$

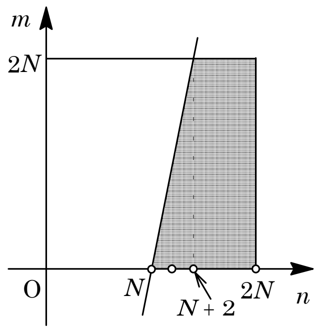
(a)(b)(c)より，$m \leqq Nn - N^2$………③

さて，③の境界線$m = Nn - N^2$において，$m = 2N$のとき，

$$2N = Nn - N^2,\ \ n = N + 2$$

(i)　$N + 2 \leqq 2N$ $(N \geqq 2)$のとき

①②③を満たす$(n,\ m)$は，右図の網点部にある格子点が対応する。ただし，n 軸以外の境界は領域に含まれる。



すると，領域内の格子点の個数Sは，

$$S = \sum_{k=N}^{N+2}(Nk - N^2) + 2N(2N - N - 2)$$

$$= N \cdot \frac{N + N + 2}{2} \cdot 3 - 3N^2 + 2N(N-2)$$

$$= 2N^2 - N$$

(ii)　$N + 2 > 2N$ $(N = 1)$のとき

①②③より，$1 \leqq m \leqq 2$，$1 \leqq n \leqq 2$，$m \leqq n - 1$となり，この不等式を満たす格子点$(n,\ m)$は，$(n,\ m) = (2,\ 1)$のみである。

ここで，$N = 1$のとき$2N^2 - N = 1$より，格子点の個数は$S = 2N^2 - N$と表せる。

(i)(ii)より，求める$(m,\ n)$は，$2N^2 - N$組存在する。

[解 説]

N以上の実数解が1個，2個と場合分けを覚悟して問題に臨みましたが，その必要はありませんでした。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　原点と点$(1,\ 1,\ 1)$を通る直線lの方程式は,

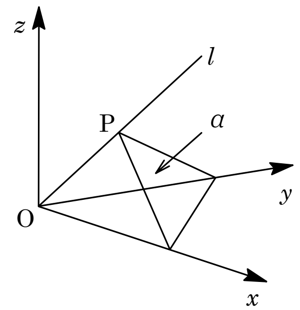
$$x = y = z \cdots\cdots\cdots ①$$

これより,点$\mathrm{P}\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$を通り$l$と垂直な平面$\alpha$は,

$$\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(y-\frac{t}{3}\right)+\left(z-\frac{t}{3}\right)=0,\quad x+y+z=t$$

この平面とxy平面との交線は,$z=0$を代入して,

$$x+y=t,\quad z=0$$



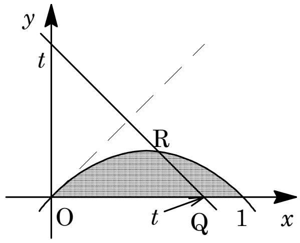
(2)　xy 平面上で,$x+y=t\cdots\cdots ②$と$y=x(1-x)\cdots\cdots ③$を連立すると,

$$t-x=x-x^2,\quad x^2-2x+t=0\cdots\cdots\cdots ④$$

②と③が共有点をもつ条件は,

$$D/4=1-t\geqq 0,\quad t\leqq 1$$

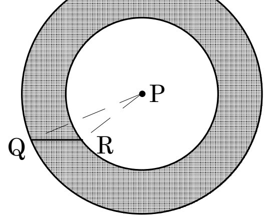
よって,直線②と領域$D:0\leqq y\leqq x(1-x)$が共有点をもつ条件は,$0\leqq t\leqq 1$である。



このとき,右図のように共有点をQ, Rとおくと,④から,$\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$,$\mathrm{R}(1-\sqrt{1-t},\ t-1+\sqrt{1-t},\ 0)$となる。

また,直線 l を xy 平面へ正射影すると,直線$x=y$, $z=0$となり,この直線は放物線③の原点における接線と一致する。

これより,平面α上で点Pを中心として線分QRを回転してできるドーナツ状の図形の外径はPQ, 内径はPRとなり,その面積$S(t)$は,



$$\mathrm{PQ}^2=\left(-\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2}{3}t^2$$

$$\mathrm{PR}^2=\left(\frac{t}{3}-1+\sqrt{1-t}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}t+1-\sqrt{1-t}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}t^2-4(t-1)-2(2-t)\sqrt{1-t}$$

$$S(t)=\pi(\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2)=\pi\left\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\right\}$$

さて,直線lの$x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$の部分を正とする$l$軸を設定し,$l=\mathrm{OP}$とおくと,$t\geqq 0$において,

$$l=\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}t$$

よって,$\dfrac{dl}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$となり,求める回転体の体積$V$は,

$$V=\int_0^1 S(t)\frac{dl}{dt}dt=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1\left\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\right\}dt$$

ここで，$1-t=u$ とおくと，

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_1^0\{-4u+2(u+1)\sqrt{u}\}(-du)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1(-4u+2u\sqrt{u}+2\sqrt{u})\,du$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big[-2u^2+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big(-2+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\Big)=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$

[解 説]

過去問を探す気分にはなりませんが，20 年以上も前には，よく見かけた問題です。ドーナツ状の断面の外径がいつも PQ，内径がいつも PR で，場合分けが必要ないのにはホッとします。なお，空間における直線や平面の方程式については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。