

1

問題のページへ

(1) $y = x^a$ に対し, $y' = ax^{a-1}$

また, $y = \log bx$ に対し, $y' = \frac{1}{x}$

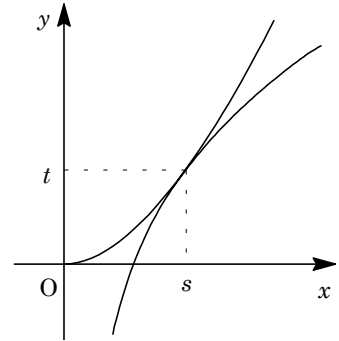
と のグラフが点 (s, t) で接することより,

$$s^a = \log bs \dots\dots\dots, \quad as^{a-1} = \frac{1}{s} \dots\dots\dots$$

から, $s^a = \frac{1}{a}$ となり $s = \frac{1}{a^{\frac{1}{a}}} = a^{-\frac{1}{a}}$

から, $t = s^a = \frac{1}{a}$

から, $\frac{1}{a} = \log \frac{b}{a^{\frac{1}{a}}}$ となり, $b = a^{\frac{1}{a}} e^{\frac{1}{a}} = (ae)^{\frac{1}{a}}$

(2) 2 曲線 $y = x^a$, $y = \log bx$ と直線 $x = h$ ($0 < h < s$) で囲まれる領域の面積 $A(h)$ は,

$$A(h) = \int_h^s (x^a - \log bx) dx = \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} - x \log b - x \log x + x \right]_h^s$$

$$= \frac{1}{a+1} (s^{a+1} - h^{a+1}) - (s-h) \log b - (s \log s - h \log h) + s - h$$

ここで, $h \rightarrow 0$ のとき, $h \log h \rightarrow 0$ なので, (1) の結果を用いると,

$$\lim_{h \rightarrow 0} A(h) = \frac{1}{a+1} s^{a+1} - s \log b - s \log s + s = s \left(\frac{1}{a+1} s^a - \log b - \log s + 1 \right)$$

$$= a^{-\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{a} \log ae + \frac{1}{a} \log a + 1 \right) = a^{-\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + 1 \right)$$

$$= a^{-\frac{1}{a}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a} + 1 \right) = \frac{a}{a+1} a^{-\frac{1}{a}}$$

[解 説]

微積分の基本問題で, 計算量も少なめです。なお, 本問では, $\lim_{h \rightarrow 0} h \log h = 0$ の利用に, 証明は不要でしょう。

2

問題のページへ

k を整数とすると、 $f(x)$ の定義より、 $f(x+k) = f(x) + k$ となり、

$$f(ax-7) = f(ax) - 7, \quad f(bx+3) = f(bx) + 3$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } \frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} &= \frac{1}{f(ax)-7} - \frac{1}{f(bx)+3} \\ &= \frac{f(bx) - f(ax) + 10}{(f(ax)-7)(f(bx)+3)} \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

同様に、 $f(x)$ の定義より、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) < x+1$ となり、

$$ax \rightarrow \infty \quad f(ax) < ax+1, \quad bx \rightarrow \infty \quad f(bx) < bx+1$$

すると、 $x > 0$ において、

$$a \rightarrow \infty \quad \frac{f(ax)}{x} < a + \frac{1}{x}, \quad b \rightarrow \infty \quad \frac{f(bx)}{x} < b + \frac{1}{x}$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(bx)}{x} = b$$

ここで、 $g(x) = x^c \left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} \right)$ とおくと、

(i) $a \neq b$ のとき

$$(*) \text{より, } g(x) = x^{c-1} \cdot \frac{\frac{f(bx)}{x} - \frac{f(ax)}{x} + \frac{10}{x}}{\left(\frac{f(ax)}{x} - \frac{7}{x}\right)\left(\frac{f(bx)}{x} + \frac{3}{x}\right)}$$

すると、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ は、 $c-1 > 0$ のとき発散、 $c-1 = 0$ のとき収束する。

よって、収束する c の最大値は $c=1$ で、このとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{b-a}{ab}$ である。

(ii) $a = b$ のとき

$$(*) \text{より, } g(x) = x^{c-2} \cdot \frac{10}{\left(\frac{f(ax)}{x} - \frac{7}{x}\right)\left(\frac{f(ax)}{x} + \frac{3}{x}\right)}$$

すると、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ は、 $c-2 > 0$ のとき発散、 $c-2 = 0$ のとき収束する。

よって、収束する c の最大値は $c=2$ で、このとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{10}{a^2}$ である。

[解 説]

題意を言い換えた不等式 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x) < x+1$ のみで評価すると、 $a = b$ のときがアバウトになりすぎます。そこで、収束する形を作るという基本に戻ったのが上の解です。もっとも、さらに基本なのは「 x が大きくなると $f(x)$ は x と同じようなもの」という感覚ですが。

3

問題のページへ

- (1) 題意のサイコロを振ったとき、
- k
- の目が出る確率を
- p_k
- とおくと、

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \dots\dots\dots (*)$$

サイコロを 2 回振ったとき、同じ目が出る確率 P は、 $(*)$ より、

$$\begin{aligned} P &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 \\ &= \left(p_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(p_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \dots + \left(p_6 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + \dots + p_6) - \frac{1}{6} \\ &= \left(p_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(p_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \dots + \left(p_6 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

よって、 $P = \frac{1}{6}$ となる。また、等号が成立するのは、 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$ のときである。

- (2) サイコロを 2 回振ったとき、1 回目に奇数、2 回目に偶数の出る確率
- Q
- は、

$$Q = (p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6)$$

相加平均と相乗平均の関係を利用すると、 $(*)$ より、

$$(p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6) \left(\frac{p_1 + p_3 + p_5 + p_2 + p_4 + p_6}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

よって、 $Q = \frac{1}{4}$ となる。また、 $3P + 2Q - 1 = 3(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_6^2) + 2(p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6) - 1$ ここで、 $(*)$ から、 $1 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)^2$ に注目すると、

$$\begin{aligned} &3(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_6^2) + 2(p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6) - 1 \\ &= 2(p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_6^2) - 2(p_1p_3 + p_3p_5 + p_5p_1 + p_2p_4 + p_4p_6 + p_6p_2) \\ &= (p_1 - p_3)^2 + (p_3 - p_5)^2 + (p_5 - p_1)^2 + (p_2 - p_4)^2 + (p_4 - p_6)^2 + (p_6 - p_2)^2 \end{aligned}$$

よって、 $3P + 2Q - 1 \geq 0$ より、 $Q \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$ となる。以上より、 $\frac{1}{4} \leq Q \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$ が成立する。

[解 説]

(1)は、有名なコーシー・シュワルツの不等式を利用するという手もありますが、ここでは結論を予測して平方完成をしました。(2)の右側の不等式の証明は難ですが、式を変形しているうちに気付いた方法で記しています。

4

問題のページへ

- (1) 線分 PQ が
- x
- 軸と直交するとき、
- $PQ=1$
- より、

$$P\left(\frac{1}{2\tan\alpha}, -\frac{1}{2}\right), Q\left(\frac{1}{2\tan\alpha}, \frac{1}{2}\right)$$

さて、PQ の中点 M は、 $M\left(\frac{1}{2\tan\alpha}, 0\right)$ となり、

$$MR = MP \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって、 $R\left(\frac{1}{2\tan\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ である。

- (2) 半直線
- L_1, L_2
- の方向ベクトルの成分は、それぞれ
- $(\cos\alpha, -\sin\alpha), (\cos\alpha, \sin\alpha)$
- とすることができるので、
- $p > 0, q > 0$
- として、

$$P(p\cos\alpha, -p\sin\alpha), Q(q\cos\alpha, q\sin\alpha)$$

すると、 $PQ=1$ より、

$$(p-q)^2 \cos^2\alpha + (p+q)^2 \sin^2\alpha = 1 \dots\dots$$

さて、PQ の中点 M は、

$$M\left(\frac{p\cos\alpha + q\cos\alpha}{2}, \frac{-p\sin\alpha + q\sin\alpha}{2}\right)$$

また、 $\overrightarrow{QP} = (p\cos\alpha - q\cos\alpha, -p\sin\alpha - q\sin\alpha)$ 、 $|\overrightarrow{QP}| = 1$ 、 $|\overrightarrow{MR}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、

$$\overrightarrow{MR} = \frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha + q\sin\alpha, p\cos\alpha - q\cos\alpha)$$

そこで、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MR}$ より、 $R(x, y)$ とおくと、

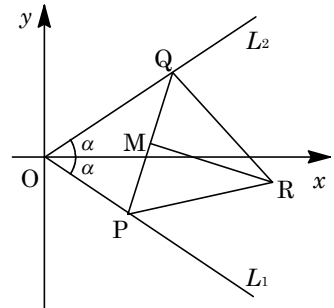
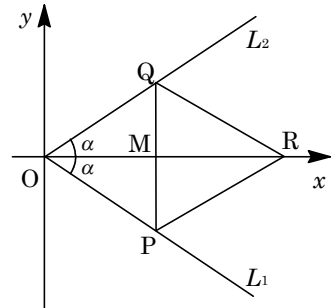
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(p\cos\alpha + q\cos\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha + q\sin\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)(p+q) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)(p+q) \dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(-p\sin\alpha + q\sin\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2}(p\cos\alpha - q\cos\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(-\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha)(p-q) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)(p-q) \dots\dots \end{aligned}$$

 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ より、 $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) > 0$ 、 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) > 0$ となり、 を に代入すると、

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}x^2 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}y^2 = 1$$

よって、点 R の軌跡は楕円の一部である。



[解 説]

図形と方程式の重要題の 1 つで、単位ベクトルの効用が実感できる問題です。