1　問題のページへ

(1)　$0 \leqq m \leqq n$ のとき, 1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れるのは,

$$p^m,\ 2p^m,\ 3p^m,\ \cdots\cdots,\ p^{n+1-m}p^m$$

これより, p^{n+1-m} 個の整数があり, また p^{m+1} で割り切れるのは,

$$p^{m+1},\ 2p^{m+1},\ 3p^{m+1},\ \cdots\cdots,\ p^{n-m}p^{m+1}$$

これより, p^{n-m} 個の整数がある。

したがって, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れない整数の個数は,

$$p^{n+1-m} - p^{n-m} = (p-1)p^{n-m}$$

(2)　(i)　$x = p^{n+1}$ のとき

任意の y で, 積 xy が p^{n+1} で割り切れるので, $(x,\ y)$ の個数は p^{n+1} である。

(ii)　$x = p^m\ (0 \leqq m \leqq n)$ のとき

x が p^m で割り切れるが p^{m+1} では割り切れず, しかも積 xy が p^{n+1} で割り切れる条件は, y が p^{n+1-m} で割り切れることである。すなわち y は,

$$p^{n+1-m},\ 2p^{n+1-m},\ 3p^{n+1-m},\ \cdots\cdots,\ p^m p^{n+1-m}$$

すると, x の個数は(1)より $(p-1)p^{n-m}$, y の個数は p^m より, $(x,\ y)$ の個数は

$$(p-1)p^{n-m} \times p^m = (p-1)p^n$$

(i)(ii)より, 積 xy が p^{n+1} で割り切れる $(x,\ y)$ の個数は,

$$p^{n+1} + \sum_{m=0}^{n}(p-1)p^n = p^{n+1} + (n+1)(p-1)p^n = (n+2)p^{n+1} - (n+1)p^n$$

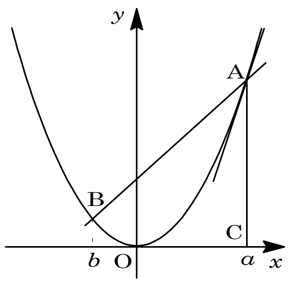
[解 説]

たとえば $p=2$, $m=3$, $n=10$ と, 具体的に数値を入れて, まず考えています。上の解は, それを一般的に記述したにすぎません。

© 電送数学舎 2007

2

問題のページへ



(1)　$y = x^2$ より，$y' = 2x$ なので，$\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線の傾きは $2a$ である。

さて，この接線および接線を A を中心として $-30°$ だけ回転した直線 l と，x 軸の正の部分とのなす角を，それぞれ α，β とすると，$\tan\alpha = 2a$ から, l の傾きは,

$$\tan\beta = \tan(\alpha - 30°) = \frac{\tan\alpha - \tan 30°}{1 + \tan\alpha \cdot \tan 30°}$$

$$= \frac{2a - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}$$

よって, l の方程式は,

$$y - a^2 = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}(x - a),\quad y = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}x + \frac{2a^3 - \sqrt{3}a^2 + a}{2a + \sqrt{3}}$$

(2)　放物線 $y = x^2$ と l との交点は,

$$x^2 - a^2 = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}(x - a),\quad (x - a)\left(x - \frac{-2a^2 + \sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}\right) = 0$$

よって，$x = a$，$\dfrac{-2a^2 + \sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}$ となり，そこで $\dfrac{-2a^2 + \sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}} = b$ とおく。

さて，線分 OC, CA と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積 $S(a)$ は,

$$S(a) = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

また，線分 AB と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積 $T(a)$ は,

$$T(a) = \int_b^a -(x - a)(x - b)\,dx = \frac{1}{6}(a - b)^3 = \frac{1}{6}\left(a - \frac{-2a^2 + \sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{4a^2 + 1}{2a + \sqrt{3}}\right)^3$$

以上より，$\dfrac{T(a)}{S(a)} = \dfrac{3}{a^3} \cdot \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4a^2 + 1}{2a + \sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4a + a^{-1}}{2a + \sqrt{3}}\right)^3$ となり,

$$\lim_{a \to \infty} \frac{T(a)}{S(a)} = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$$

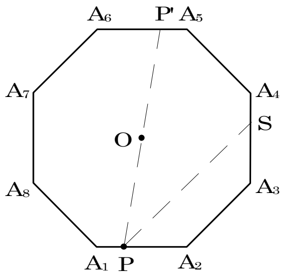
[解　説]

微積分の標準的な問題です。計算の質や量も適当です。

© 電送数学舎 2007

3

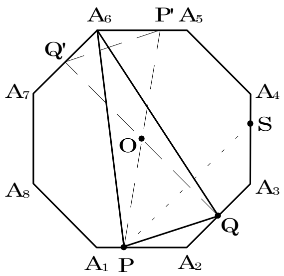
問題のページへ



(1)　まず，点 P を辺A_1A_2上に固定する。さらに，正八角形の中心を O とし，点 P, Q の O に関する対称点をそれぞれP'，Q'とおく。また，$PS /\!/ A_6A_7$となるように点 S を辺A_3A_4上にとる。

以下，対称性より，点 Q がPA_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5P'上にあるときを考える。

(i)　点 Q がPA_2，A_2A_3，A_3S上にあるとき



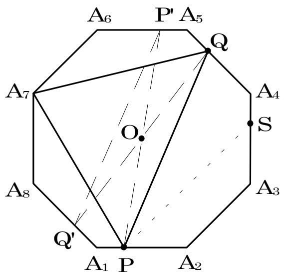
$P'Q' /\!/ PQ$より，点 R が点A_6にあるとき，△PQR の面積はつねに最大になり，

$$\triangle PQR \leqq \triangle PQA_6$$

このとき点 Q を動かすと，PA_6からの距離が最大となるのは，Q が S に一致するときである。すなわち，

$$\triangle PQA_6 \leqq \triangle PSA_6$$

(ii)　点 Q がSA_4，A_4A_5，A_5P'上にあるとき



$P'Q' /\!/ PQ$より，点 R が点A_7にあるとき，△PQR の面積はつねに最大になり，

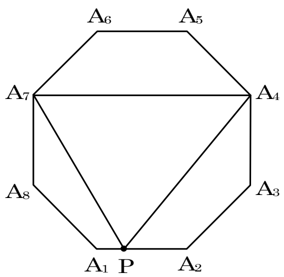
$$\triangle PQR \leqq \triangle PQA_7$$

このとき点 Q を動かすと，PA_7からの距離が最大となるのは，Q がA_4に一致するときである。すなわち，

$$\triangle PQA_7 \leqq \triangle PA_4A_7$$

(i)(ii)より，$\triangle PSA_6$と$\triangle PA_4A_7$の面積を比べると，

$$\triangle PA_4A_7 \geqq \triangle PA_4A_6 \geqq \triangle PSA_6$$



以上より，△PQR の面積は，$\triangle PQR = \triangle PA_4A_7$のとき最大となる。

さて，$A_4A_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

また，P からA_4A_7までの距離は，$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$より，

$$\triangle PA_4A_7 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4+3\sqrt{2}}{4}$$

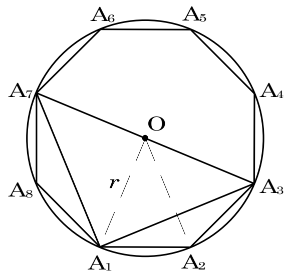
(2)　点 Q が頂点A_1に一致するとき，正八角形の外接円の直径の両端として，P''，Q''をとるとき，$\angle P''QR'' = 90^\circ$となる。

そこで，$\triangle P''QR''$の面積が最大となるのは，$A_1O \perp P''R''$のときであり，直径$P''R''$がA_3A_7に一致する。

© 電送数学舎 2007

よって，$\triangle$PQR の面積は，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{A_1A_3A_7}$ のとき最大となる。

さて，$\sin 22.5^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ から，外接円の半径 r は,



$$r=\frac{\frac{1}{2}}{\sin 22.5^\circ}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

以上より，$\triangle$PQR の面積の最大値は,

$$\triangle\mathrm{A_1A_3A_7}=\frac{1}{2}r^2\times 2=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

[解 説]

平面図形の最大・最小問題ですが，制限時間のある入試ではキツイ内容です。特に，どこまで記述すればよいのか迷ってしまいます。(1)では丁寧に書きましたが，(2)ではそのエネルギーが枯渇しています。

© 電送数学舎 2007

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ に対して,

$$f_n{}'(x)=a_n\{(n+1-x)-(x-n)\}=a_n(-2x+2n+1)$$

また, $y=e^{-x}$ に対して, $y'=-e^{-x}$

さて, 2 曲線 $y=a_n(x-n)(n+1-x)$ と $y=e^{-x}$ が $x=t_n$ で接するとすると,

$$a_n(-2t_n+2n+1)=-e^{-t_n}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad a_n(t_n-n)(n+1-t_n)=e^{-t_n}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$a_n>0$ より, ①②から, $2t_n-2n-1=(t_n-n)(n+1-t_n)$

$$t_n{}^2-(2n-1)t_n+n^2-n-1=0$$

よって, $t_n=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2}$

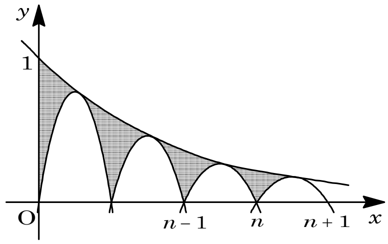
$n<t_n<n+1$ から, $t_n=\dfrac{2n-1+\sqrt{5}}{2}$ となり, ①に代入すると,

$$a_n=\frac{-1}{-(2n-1+\sqrt{5})+2n+1}e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}=(2+\sqrt{5})e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2)　まず, $y=f_n(x)$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は,

$$\int_n^{n+1}a_n(x-n)(n+1-x)\,dx=\frac{a_n}{6}(n+1-n)^3=\frac{a_n}{6}$$

ここで, $0\leqq x\leqq n$ において, 曲線 $y=e^{-x}$ と $y=f_0(x)$, $y=f_1(x)$, $\cdots$, $y=f_{n-1}(x)$ によってはさまれた部分の面積を T_n とおくと,



$$T_n=\int_0^n e^{-x}dx-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

$$=-\Big[e^{-x}\Big]_0^n-\frac{2+\sqrt{5}}{6}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\frac{2k-1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=-e^{-n}+1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$$

さて, 条件より, $T_n<S_0+S_1+\cdots+S_n<T_{n+1}$ であり,

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}T_{n+1}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

よって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

[解 説]

(2)では, 最初, S_n を定積分で立式しましたが, とうてい計算を実行する気になれません。そこで, 第 2 問と同様に, $\dfrac{1}{6}$ 公式が登場したわけです。

© 電送数学舎 2007