

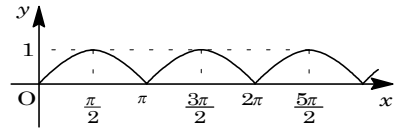
1

問題のページへ

(1) $f(x) = |\sin x|$ とおくと,

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)|$$

$$= |-\sin x| = f(x)$$



また, k を整数として,

$$f(k\pi - x) = |\sin(k\pi - x)| = |\sin x| = f(x)$$

これより, $y = f(x)$ のグラフは周期 π であり, しかも直線 $x = \frac{k\pi}{2}$ に関して対称であるので,

$$I(n) = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} |\sin x| dx = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -n [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = n$$

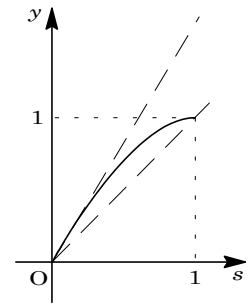
(2) $0 \leq s \leq 1$ において, $g(s) = \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{s\pi}{2}} = \sin \frac{s\pi}{2}$ とおく。

$$g'(s) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{s\pi}{2} \quad 0, \quad g''(s) = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{s\pi}{2} \quad 0$$

これより, $y = g(s)$ のグラフは, 右図のように, 上に凸で単調に増加し, $g'(0) = \frac{\pi}{2}$ から,

$$s \leq g(s) \leq \frac{\pi}{2}s, \quad 0 \leq g(s) - s \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)s$$

よって, $0 \leq \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x dx - s \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)s \quad (0 \leq s \leq 1)$



(3) まず, $at = x$ とおくと,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{[a]\pi}{2}} |\sin x| dx + \frac{1}{a} \int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx$$

ここで, (1)の結果を用いると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| dt = \frac{[a]}{a} + \frac{1}{a} \int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx \dots\dots$$

さて, $x - \frac{[a]\pi}{2} = u$ とおくと, $[a]$ が奇数より,

$$\frac{1}{a} \int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi} \left| \sin \left(u + \frac{[a]\pi}{2} \right) \right| du = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi} |\cos u| du$$

$0 \leq \frac{a-[a]}{2}\pi < \frac{\pi}{2}$ から,

$$\frac{1}{a} \int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi} \cos u du \dots\dots$$

さらに, $0 \leq a - [a] < 1$ なので, (2)より,

$$a - [a] \int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi} \cos x \, dx \quad \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)(a - [a]) + (a - [a])$$

$$1 - \frac{[a]}{a} \int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi} \cos x \, dx \quad \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{[a]}{a}\right) + \left(1 - \frac{[a]}{a}\right) \dots\dots\dots$$

より,

$$\frac{[a]}{a} + 1 - \frac{[a]}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| \, dt \quad \frac{[a]}{a} + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{[a]}{a}\right) + \left(1 - \frac{[a]}{a}\right)$$

$$\text{以上より, } 0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| \, dt - 1 \quad \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{[a]}{a}\right)$$

[解 説]

グラフを見ながら解いています。(1)と(2)は直接的ですが、(3)もグラフを対応させて方針を立てました。つまり、 $y = f(x)$ のグラフの特徴から、 $[a]$ が奇数という条件の利用方法を考えたわけです。

2

問題のページへ

(1) $g(t) = \frac{1}{b}t^a - \log t$ より,

$$g'(t) = \frac{a}{b}t^{a-1} - \frac{1}{t} = \frac{a}{bt} \left(t^a - \frac{b}{a} \right)$$

関数 $g(t)$ の増減は右表のようになり、極小値は、

$$g\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{a} - \frac{1}{a} \log \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \left(1 - \log \frac{b}{a} \right)$$

(2) 条件(a)より $y > x > 0$ なので、(1)から、 $\frac{1}{y}t^x - \log t = \frac{1}{x} \left(1 - \log \frac{y}{x} \right)$

すると、条件(b)が成立する条件は、 $\frac{1}{x} \left(1 - \log \frac{y}{x} \right) = m$ となり、

$$\log \frac{y}{x} = 1 - mx, \quad y = xe^{1-mx} \dots\dots\dots$$

ここで、 $f(x) = xe^{1-mx}$ とおくと、

$$f'(x) = e^{1-mx} - mxe^{1-mx} = (1-mx)e^{1-mx}$$

よって、 $f'(x) = 0$ を満たす領域 D を図示すると、

右図の網点部となる。ただし破線の境界は含まない。

(3) 領域 D の面積 S は、 $S = \int_0^{\frac{1}{m}} xe^{1-mx} dx - \frac{1}{2m^2}$

$$\text{さて、} \int_0^{\frac{1}{m}} xe^{1-mx} dx = \left[-\frac{1}{m} xe^{1-mx} \right]_0^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} \int_0^{\frac{1}{m}} e^{1-mx} dx$$

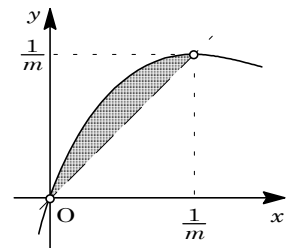
$$= -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \left[-\frac{1}{m} e^{1-mx} \right]_0^{\frac{1}{m}}$$

$$= -\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2} (1-e) = -\frac{2}{m^2} + \frac{e}{m^2}$$

$$\text{よって、} S = -\frac{2}{m^2} + \frac{e}{m^2} - \frac{1}{2m^2} = \frac{1}{2m^2} \left(e - \frac{5}{2} \right)$$

t	0	...	$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		↘		↗

x	0	...	$\frac{1}{m}$...	
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	↗	$\frac{1}{m}$	↘	0



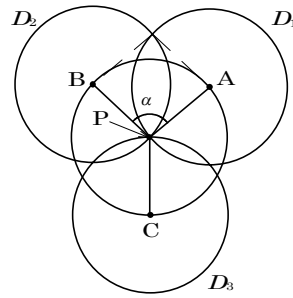
[解 説]

式の形から明らかなように、(1)が(2)の誘導となっています。(1)で求めた最小値を利用して(2)を解きなさいというメッセージを読み取ることができます。

3

問題のページへ

右図のように 3 個の半径 1 の円板を D_1, D_2, D_3 とし、その中心をそれぞれ A, B, C とおく。



さらに、 $\angle APB = \alpha, \angle BPC = \beta, \angle CAP = \gamma$ とおくと、
 $0 < \alpha < \pi, \pi - \alpha < \beta < \pi, \pi - \alpha < \gamma < \pi$ において、
 $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi \dots\dots\dots$

すると、 D_1 と D_2 の共通部分の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 (\pi - \alpha) \times 2 - 1^2 \sin \alpha = \pi - \alpha - \sin \alpha$$

D_2 と D_3, D_3 と D_1 の共通部分の面積も同様に考える

ことができ、3 個の円板 D_1, D_2, D_3 の和集合の面積 S は、 を利用して、

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot 1^2 \times 3 - \{(\pi - \alpha - \sin \alpha) + (\pi - \beta - \sin \beta) + (\pi - \gamma - \sin \gamma)\} \\ &= 2\pi + \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 2\pi + \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) \\ &= 2\pi + \sin \alpha + 2 \cos \frac{\beta + \alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha - \beta}{2} \\ &= 2\pi + \sin \alpha - 2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

さて、 α を $0 < \alpha < \pi$ で固定すると、 $\pi - \alpha < \beta < \pi$ から $-\frac{\alpha}{2} + \pi < \frac{\alpha}{2} + \beta < \frac{\alpha}{2} + \pi$ となる。よって、 $\frac{\alpha}{2} + \beta = \pi \dots\dots\dots$ のとき、 S は最大となり、

$$S = 2\pi + \sin \alpha + 2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

そこで、 α を $0 < \alpha < \pi$ で変化させると、

$$\begin{aligned} S' &= \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \\ &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

α	0	...	$\frac{2}{3}\pi$...	π
S'		+	0	-	
S		↗		↘	

以上より、 $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ のとき S は最大値をとり、その値は、

$$S = 2\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

なお、このとき より、 $\beta = \gamma = \frac{2}{3}\pi$ である。

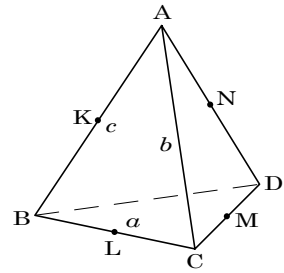
[解 説]

東工大らしい問題です。結論は容易に推測できるものの、それを示すのは簡単ではありません。なお、条件(b)は、 α, β, γ の範囲に反映しています。

4

問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 4\overline{MK} \cdot \overline{LN} &= 4\left(\frac{\overline{AB}}{2} - \frac{\overline{AC} + \overline{AD}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\overline{AD}}{2} - \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}\right) \\
 &= (\overline{AB} - \overline{AC} - \overline{AD}) \cdot (-\overline{AB} - \overline{AC} + \overline{AD}) \\
 &= (-\overline{AC} - \overline{BD}) \cdot (-\overline{AC} + \overline{BD}) \\
 &= |\overline{AC}|^2 - |\overline{BD}|^2
 \end{aligned}$$



(2) ABC について、 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ とする。

(i) 3 辺の長さが異なるとき ($a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$)

$ABC \cong ABD$ より、 $BD = a$ または $AD = a$ である。

ここで、 $BD = a$ のときは、BCD について $BC = BD$ となり不適である。

よって、 $AD = a$ となり、このとき $BD = b$ となる。

同様に考えると、 $ABC \cong ACD$ より、 $CD = c$ かつ $AD = a$ となる。

以上より、 $AD = BC$, $BD = CA$, $CD = AB$ である。

(ii) 2 辺の長さのみ等しいとき ($a = b \neq c$ または $a = c \neq b$ または $b = c \neq a$)

まず、 $a = b \neq c$ のとき、 $ABC \cong ABD$ より、 $AD = BD = a$ である。

また、 $ABC \cong ACD$ より $CD = c$ となり、 $AD = BC$, $BD = CA$, $CD = AB$ である。なお、対称性から、 $a = c \neq b$, $b = c \neq a$ のときも同様となる。

(iii) 3 辺の長さが等しいとき ($a = b = c$)

四面体 ABCD は正四面体であり、 $AD = BC$, $BD = CA$, $CD = AB$ である。

(i) ~ (iii) より、 $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$, $|\overline{BC}| = |\overline{AD}|$, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$

(3) (2) より、四面体 ABCD は、右図のように直方体に埋め込まれる。この直方体の辺の長さを p, q, r とおくと、

$$p^2 + q^2 = 3, \quad p^2 + r^2 = 5, \quad q^2 + r^2 = 6$$

これより、 $p^2 + q^2 + r^2 = 7$ となり、

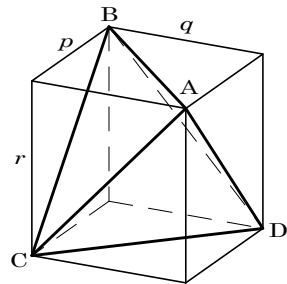
$$p = 1, \quad q = \sqrt{2}, \quad r = 2$$

そこで、四面体 ABCD の体積を V_0 とおくと、

$$V_0 = pqr - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} pqr \times 4 = \frac{1}{3} pqr = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

四面体 PKLN の体積は、P が辺 AC の中点より四面体 PKAN の体積に等しい。

よって、 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12}$ である。



[解 説]

(3)は、(1), (2)を無視して、等面四面体が直方体に埋め込まれるということを利用してしています。なお、2001年東北大で、1993年東大で類する問題が出ています。