

1

問題のページへ

(1) $n = 2$ のとき, 条件より,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^e (\log x)^n dx = \left[x (\log x)^n \right]_1^e - \int_1^e x \cdot n (\log x)^{n-1} x^{-1} dx \\ &= e - n \int_1^e (\log x)^{n-1} dx = e - n a_{n-1} \quad (n = 2) \dots\dots\dots \end{aligned}$$

 $n = 3$ のとき, 条件より, $a_{n-1} = e - (n-1)a_{n-2} \dots\dots\dots$ - から, $a_n - a_{n-1} = -n a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ となり,

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}) \quad (n = 3)$$

(2) $1 < x < e$ において, $(\log x)^{n+1} > 0$ (等号は $x=1$ のときのみ成立) より,

$$a_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx > 0$$

また, (1)より, $a_{n+2} = (n+1)(a_n - a_{n+1}) > 0$ から, $a_n > a_{n+1}$ よって, $a_n > a_{n+1} > 0$ (3) (2)より, $a_{2n-1} > a_{2n} > 0 \dots\dots\dots$ また(1)より, $a_{2n} = (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n-1}) \quad (n = 2) \dots\dots\dots$ より, $a_{2n} < (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n-1})$ となり,

$$2n a_{2n} < (2n-1)a_{2n-2}, \quad a_{2n} < \frac{2n-1}{2n} a_{2n-2} \dots\dots\dots$$

 $a_n > 0$ より, から, $a_{2n} < \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \dots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} a_2$

$$\text{ここで, } a_2 = \int_1^e (\log x)^2 dx = e - 2 \int_1^e \log x dx = e - 2 \left[x \log x - x \right]_1^e$$

$$= e - 2 \{ e - (e-1) \} = e - 2$$

$$\text{以上より, } a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{4 \cdot 6 \dots (2n)} (e-2)$$

[解 説]

(3)の結論の不等式から, どのような漸化式を導けばよいのか推測できます。そのため誘導が, (1)と(2)です。

2

問題のページへ

(1) $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + sx + t$ より,

$$s = -(\alpha + \beta), \quad t = \alpha\beta$$

 α, β の期待値をそれぞれ $E(\alpha), E(\beta)$ とすると,

$$E(\alpha) = E(\beta) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\text{すると, } E(s) = E(-\alpha - \beta) = -E(\alpha) - E(\beta) = -7$$

また, α と β は独立なので,

$$E(t) = E(\alpha\beta) = E(\alpha)E(\beta) = \frac{49}{4}$$

(2) $(x - \alpha)^2(x - \beta)^2 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ より,

$$a = -2\alpha - 2\beta, \quad b = \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2, \quad c = -2\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta, \quad d = \alpha^2\beta^2$$

$$\text{すると, } E(a) = E(-2\alpha - 2\beta) = -2E(\alpha) - 2E(\beta) = -14$$

 α^2, β^2 の期待値をそれぞれ $E(\alpha^2), E(\beta^2)$ とすると,

$$E(\alpha^2) = E(\beta^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\text{すると, } E(b) = E(\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2) = E(\alpha^2) + 4E(\alpha\beta) + E(\beta^2) = \frac{238}{3}$$

また, α^2 と β, α と β^2 は独立なので,

$$E(c) = E(-2\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta) = -2E(\alpha)E(\beta^2) - 2E(\alpha^2)E(\beta) = -\frac{637}{3}$$

さらに, α^2 と β^2 は独立なので,

$$E(d) = E(\alpha^2\beta^2) = E(\alpha^2)E(\beta^2) = \frac{8281}{36}$$

[解説]

旧課程では数 B, 現行課程では数 C の「確率分布」のセクションにある公式を用いました。書き方がやや雑ですが。

3

問題のページへ

円 C の対称性から、条件を満たす円盤 D が通過する領域は、 xz 平面に関して対称である。

そこで、 $y = 0$ の部分に対し、この部分を平面 $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切った切り口を考える。

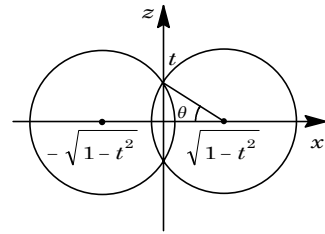
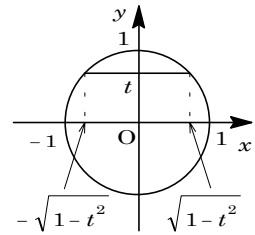
この切り口は、中心 $(\sqrt{1-t^2}, t, 0)$ 、半径 1 の円と、中心 $(-\sqrt{1-t^2}, t, 0)$ 、半径 1 の円の和集合となっている。

右図のように角 θ をとると、

$$\cos \theta = \sqrt{1-t^2}, \quad \sin \theta = t \dots\dots\dots (*)$$

そこで、切り口の面積を $S(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} S(t) &= 4 \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1^2 (\pi - \theta) + \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} \right\} \\ &= 2\pi - 2\theta + 2t\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$



求める D の通過領域の体積 V は、

$$V = 2 \int_0^1 S(t) dt = 4 \int_0^1 (\pi - \theta + t\sqrt{1-t^2}) dt = 4\pi - 4 \int_0^1 \theta dt + 4 \int_0^1 t\sqrt{1-t^2} dt$$

(*)より、 $dt = \cos \theta d\theta$ となり、

$$\int_0^1 \theta dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \cos \theta d\theta = \left[\theta \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2} - 1$$

また、 $\sqrt{1-t^2} = u$ とおくと、 $1-t^2 = u^2$ 、 $-2tdt = 2udu$ から、

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2} dt = \int_1^0 u(-u) du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

以上より、

$$V = 4\pi - 4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 4 \cdot \frac{1}{3} = 2\pi + \frac{16}{3}$$

[解 説]

初めは、 z 軸に垂直な切り口を考えましたが、複雑そうなので、考えを改め、 y 軸に垂直な切り口に変更しました。断面積を求めるときに、中心角を設定する必要がありますが、今年は、東大でもこの技法を用いる問題が出ています。

4

問題のページへ

(1) $s = x + y, t = xy$ より, 実数 x, y は, 2 次方程式 $u^2 - su + t = 0$ の解なので,

$$D = s^2 - 4t \geq 0, t \leq \frac{1}{4}s^2 \dots\dots\dots$$

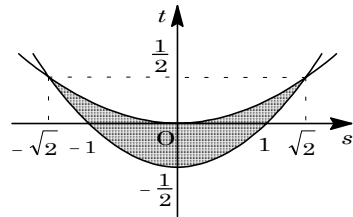
条件より, $x^2 + y^2 \leq 1$ から, $(x + y)^2 - 2xy \leq 1$ となり,

$$s^2 - 2t \leq 1, t \leq \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \dots\dots\dots$$

の境界線の交点は, $\frac{1}{4}s^2 = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$ より,

$$s = \pm\sqrt{2}, t = \frac{1}{2}$$

よって, 点 (s, t) の動く範囲は右図の網点部となる。なお, 境界は領域に含む。



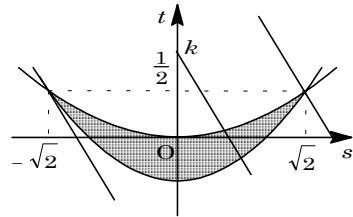
(2) $xy + m(x + y) = k$ とおくと, $t + ms = k$ から,

$$t = -ms + k \dots\dots\dots$$

さて, st 平面上で $t = -ms + k$ は傾き $-m$ の直線群を表し,
(1)の領域を共有点の存在する k の範囲を求める。

まず, $-m \leq 0$ なので, k は $(s, t) = (\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ に

おいて最大となり, 最大値は $\frac{1}{2} + \sqrt{2}m$ である。



また, $-m > 0$ の境界線 $t = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$ と直線 $t = -ms + k$ が接するとき,

$$-ms + k = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}, s^2 + 2ms - 2k - 1 = 0 \dots\dots\dots$$

より, 接点の s 座標は $s = -m$ となる。

(i) $-m \leq -\sqrt{2} (m \geq \sqrt{2})$ のとき

図より, k は $(s, t) = (-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$ において最小となり, 最小値は $\frac{1}{2} - \sqrt{2}m$ である。

(ii) $-m > -\sqrt{2} (0 < m < \sqrt{2})$ のとき

図より, k は接点 $(s, t) = (-m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2})$ において最小となり, 最小値は $\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2} - m^2$ すなわち $-\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}$ となる。

[解 説]

経験済みというのが当然なぐらいの頻出題です。(2)の場合分けも煩雑なものではありません。