1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ より，$f'(x)=\dfrac{4x^3(x-a)^3-x^4\cdot 3(x-a)^2}{(x-a)^6}=\dfrac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}$

これより，$f(x)$ の増減は，右の表のようになる。なお，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ である。

x	a	$\cdots$	$4a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	$\dfrac{256}{27}a$	$\nearrow$

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ より，

$$g'(x)=\frac{-2}{(x-a)^3}+\frac{3b}{x^4}=\frac{-2x^4+3b(x-a)^3}{x^4(x-a)^3}$$

ここで，$h(x)=-2x^4+3b(x-a)^3$ とおくと，$a<x$ で $h(x)$ の符号と $g'(x)$ の符号は一致し，

$$h(x)=-2(x-a)^3\left\{\frac{x^4}{(x-a)^3}-\frac{3b}{2}\right\}=-2(x-a)^3\left\{f(x)-\frac{3b}{2}\right\}$$

(i)　$\dfrac{3b}{2}\leqq\dfrac{256}{27}a\left(b\leqq\dfrac{512}{81}a\right)$ のとき

$a<x$ において，$f(x)-\dfrac{3b}{2}\geqq 0$ なので，$h(x)\leqq 0$ すなわち $g'(x)\leqq 0$ となる。

よって，$g(x)$ は単調減少するので，$g(x)$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線は存在しない。

(ii)　$\dfrac{3b}{2}>\dfrac{256}{27}a\left(b>\dfrac{512}{81}a\right)$ のとき

(1)より，$f(x)-\dfrac{3b}{2}=0$ は $a<x$ で異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになる。なお，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}g(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ である。

x	a	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

すると，$g(x)$ は $a<x$ で連続なので，このグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b>\dfrac{512}{81}a$ である。

[解 説]

(2)で関数 $h(x)$ を設定しましたが，振り返ってみると冗長でした。$g'(x)$ のままで同じように処理ができます。

2

問題のページへ

(1)　まず, 積分区間$0 \leqq x \leqq m\pi$をm等分して,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, $t = x-(k-1)\pi$とおくと,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f\left(\sin(t+(k-1)\pi)\right)g\left(\cos(t+(k-1)\pi)\right)dt$$

さて, $\sin(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\sin t$, $\cos(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\cos t$と表すことができ, さらに$f(x)$, $g(x)$は偶関数より,

$$f\left(\sin(t+(k-1)\pi)\right) = f\left((-1)^{k-1}\sin t\right) = f(\sin t)$$

$$g\left(\cos(t+(k-1)\pi)\right) = g\left((-1)^{k-1}\cos t\right) = g(\cos t)$$

よって, $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)dt \cdots\cdots\cdots ②$

①②より, $\displaystyle\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$

(2)　$\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$として, $nx = t$とおくと,

$$I_n = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}\cdot\frac{dt}{n} = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

ここで, $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$において, $\dfrac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} \geqq 0$なので,

$$I_n \geqq \frac{1}{n}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \geqq \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ③$$

$$I_n \leqq \frac{1}{n}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ④$$

さて, $f(x) = |x|$, $g(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$とおくと, $f(x)$, $g(x)$は連続な偶関数なので, (1)の結論から,

$$\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑤$$

同様にして, $\displaystyle\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = (m+1)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑥$

③～⑥より, $\displaystyle\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$

(3)　まず, $\cos x = u$とおくと,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx = \int_1^{-1}\frac{1}{(1+u^2)^2}(-du) = 2\int_0^1\frac{1}{(1+u^2)^2}du$$

さらに，$u=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$2\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

そこで, (2)の結論から,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$n\to\infty$のとき $m\to\infty$となるので，はさみうちの原理を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \lim_{m\to\infty} I_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$$

[解　説]

(3)の極限値が到達点となりますが，このために与えられた誘導の意味を考えながら，(1)と(2)の証明を進めます。決して易しくはありませんが，演習する価値の大きな一題です。

3

問題のページへ

(1)　コイン Q を選び，つぼの中に赤玉が入る確率は pq，白玉が入る確率は $p(1-q)$ より，つぼの中に赤玉が k 個，白玉が $n-k$ 個入っている確率は，

$$ {}_n\mathrm{C}_k(pq)^k\{p(1-q)\}^{n-k} = {}_n\mathrm{C}_k p^n q^k(1-q)^{n-k} $$

(2)　コイン R を選び，つぼの中に赤玉が入る確率は $(1-p)r$ なので，コイン Q を選んだ場合も合わせて，つぼの中に赤玉が入る確率は，

$$ pq+(1-p)r = pq-pr+r $$

したがって，つぼの中が赤玉だけとなる確率は，$(pq-pr+r)^n$ である。

(3)　つぼの中に赤玉が k 個，白玉が $n-k$ 個入っている確率を P_k とすると，

$$ P_k = {}_n\mathrm{C}_k(pq-pr+r)^k\{1-(pq-pr+r)\}^{n-k} $$

$n=2004$，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{2}$，$r=\dfrac{1}{5}$ のとき，

$$ P_k = {}_{2004}\mathrm{C}_k\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}\quad(0\leqq k\leqq 2004) $$

$$ \frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{\dfrac{2004!}{(k+1)!(2003-k)!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k+1}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2003-k}}{\dfrac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2004-k}} = \frac{7}{13}\cdot\frac{2004-k}{k+1} $$

そこで，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}>1$ とすると，$7(2004-k)>13(k+1)$ から，$k<700+\dfrac{3}{4}$ となる。

すると，$k\leqq 700$ のとき $P_{k+1}>P_k$，$k\geqq 701$ のとき $P_{k+1}<P_k$ となり，

$$ P_0<P_1<P_2<\cdots\cdots<P_{700}<P_{701}>P_{702}>\cdots\cdots>P_{2003}>P_{2004} $$

よって，P_{701} が最大となり，赤玉が 701 個入っている場合が最も起こりやすい。

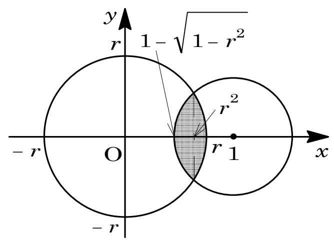
[解 説]

確率の最大・最小に関する頻出問題です。(1)の確率は，$p^n\times{}_n\mathrm{C}_k q^k(1-q)^{n-k}$ とみても OK です。

4

問題のページへ

(1)　2 つの円 $x^2+y^2=r^2$ と $(x-1)^2+y^2=1-r^2$ の共通部分を x 軸のまわりに回転したときにできる立体の体積が $V(r)$ である。



まず, 2 つの円の共有点の x 座標は,

$$(x-1)^2+(r^2-x^2)=1-r^2$$

これより, $x=r^2$ となり,

$$V(r)=\pi\int_{r^2}^{r}(r^2-x^2)\,dx+\pi\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\left\{1-r^2-(x-1)^2\right\}dx$$

ここで, $\displaystyle\int_{r^2}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{r^2}^{r}=r^2(r-r^2)-\frac{1}{3}(r^3-r^6)$

$$=\frac{1}{3}r^6-r^4+\frac{2}{3}r^3$$

$$\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\left\{1-r^2-(x-1)^2\right\}dx=\left[(1-r^2)x-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}$$

$$=(1-r^2)\left(r^2-1+\sqrt{1-r^2}\right)-\frac{1}{3}\left\{(r^2-1)^3+(1-r^2)\sqrt{1-r^2}\right\}$$

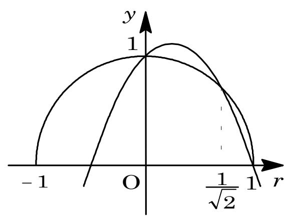
$$=\frac{2}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}+\frac{1}{3}(1-r^2)^3-(1-r^2)^2=\frac{2}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}-\frac{1}{3}r^6+r^2-\frac{2}{3}$$

以上より, $V(r)=\dfrac{\pi}{3}\left\{2(1-r^2)\sqrt{1-r^2}-3r^4+2r^3+3r^2-2\right\}$

(2)　(1)より, $V'(r)=\dfrac{\pi}{3}\left\{2\cdot\dfrac{3}{2}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2r)-12r^3+6r^2+6r\right\}$

$$=2\pi r\left(-\sqrt{1-r^2}-2r^2++r+1\right)$$

ここで, $y=\sqrt{1-r^2}$ と $y=-2r^2+r+1$ のグラフをかくと, 右図のようになり, 交点の r 座標は,



$$\sqrt{1-r^2}=-2r^2+r+1,\quad 1-r^2=(-2r^2+r+1)^2$$

$$4r^4-4r^3-2r^2+2r=0,\quad r(r-1)(2r^2-1)=0$$

図から, $r=0,\ 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

すると, $0<r<1$ のとき, $V(r)$ の増減は右表のようになり, $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大となる。

r	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$V'(r)$	0	＋	0	－	0
$V(r)$		↗		↘	

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{3}\left\{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}+\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2}-2\right\}=\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)$$

[解 説]

計算量は多いですが, 方針に迷いは生じません。今年は, 東大で 2 球の和集合, 東工大では 2 球の共通部分の体積が題材となりました。