

1

問題のページへ

(1) $C: y = -x^3 + ax^2 + bx \dots\dots$, 原点を通る直線 $y = kx \dots\dots$ とおく。

より, $x^3 - ax^2 + (k-b)x = 0$, $x = 0$ または $x^2 - ax + (k-b) = 0 \dots\dots\dots$

と が 2 点を共有する条件は, 次の 2 つの場合がある。

(i) が 0 以外の重解をもつとき

$$D = a^2 - 4(k-b) = 0 \text{ より, } k = b + \frac{a^2}{4}$$

このとき の解は $x = \frac{a}{2} > 0$ となり, 条件に適する。

(ii) が異なる 2 つの実数解をもち, その 1 つが 0 のとき

に $x = 0$ を代入して, $k - b = 0$, $k = b$

このとき の解は $x = 0$, $x = a > 0$ となり, 条件に適する。

(i)(ii)より, $y = \left(b + \frac{a^2}{4}\right)x$, $y = bx$

(2) $l_1: y = \left(b + \frac{a^2}{4}\right)x \dots\dots$, $l_2: y = bx \dots\dots$ より, と の共有点は,

$$-x^3 + ax^2 + bx = \left(b + \frac{a^2}{4}\right)x, \quad x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{4}x = 0, \quad x\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 0$$

これより, 共有点の x 座標は $x = 0$, $\frac{a}{2}$ となり, $a > 0$ から,

$$S_1 = \int_0^{\frac{a}{2}} \left(x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{4}x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - a \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{a^2}{4} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{192}a^4$$

また, と の共有点は, $-x^3 + ax^2 + bx = bx$, $x^2(x - a) = 0$, $x = 0$, a

$$S_2 = \int_0^a -(x^3 - ax^2) dx = -\left[\frac{x^4}{4} - a \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{12}a^4$$

したがって, $S_1 : S_2 = \frac{1}{192}a^4 : \frac{1}{12}a^4 = 1 : 16$

[解 説]

同じ題材で, センター試験に出題されても不思議はないような問題です。ただし, 10 年ほど前の話としてですが。

2

問題のページへ

- (1) 縦の長さが 1, 横の長さが a の長方形を考えると, $a > 1$ より, 1 回目に取り去る正方形の 1 辺の長さは 1 である。また, 3 回で操作が終わるため, 3 回目に取り去る正方形と, 残った正方形は同じ大きさである。

ここで, n 回目に取り去る正方形の 1 辺の長さを l_n , 最後に残った正方形の 1 辺の長さを L とすると,

$$1 = l_1 \quad l_2 \quad l_3 = L$$

- (i) $l_1 = l_2 = l_3$ のとき

$l_1 = l_2 = l_3 = L = 1$ なので, 右図から,

$$a = 4$$



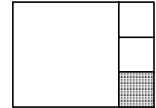
- (ii) $l_1 = l_2 > l_3$ のとき

$1 = l_1 = l_2 > l_3 = L$ なので, 右図から, $a = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$



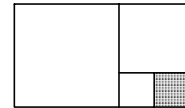
- (iii) $l_1 > l_2 = l_3$ のとき

$1 = l_1 > l_2 = l_3 = L$ なので, 右図から, $a = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$



- (iv) $l_1 > l_2 > l_3$ のとき

$1 = l_1 > l_2 > l_3 = L$ なので, 右図から, $a = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$



- (2) a が最大となるのは $1 = l_1 = l_2 = l_3 = \dots = l_n = L$ のときである。

このとき, $a = n + 1$ となる。

a が最小となるのは $1 = l_1 > l_2 = l_3 = \dots = l_n = L$ のときである。

このとき, $l_2 = l_3 = \dots = l_n = L = \frac{1}{n}$ より, $a = 1 + \frac{1}{n}$ となる。

[解 説]

答は直観的にわかるのですが, それをどのように記述するとよいのが, 迷います。上の解答例では直観的な部分を残しています。

3

問題のページへ

\vec{AB} , \vec{AC} は 1 次独立なので, t, s を実数として,

$$\vec{AR} = t\vec{AB} + s\vec{AC}$$

R は PC 上にあるので, $\vec{AR} = \frac{t}{x}\vec{AB} + s\vec{AC}$ ($x \neq 0$) より,

$$\frac{t}{x} + s = 1 \dots\dots\dots$$

R は BQ 上にあるので, $\vec{AR} = t\vec{AB} + \frac{s}{y}\vec{AC}$ ($y \neq 0$) より,

$$t + \frac{s}{y} = 1 \dots\dots\dots$$

から $s = 1 - \frac{t}{x}$ として, に代入すると, $t + \frac{1}{y}\left(1 - \frac{t}{x}\right) = 1$

$$\frac{1-xy}{xy}t = \frac{1-y}{y}, t = \frac{x(1-y)}{1-xy} \dots\dots, s = 1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{x(1-y)}{1-xy} = \frac{y(1-x)}{1-xy} \dots\dots$$

なお, から, $x = 0$ のときは $(t, s) = (0, y)$, $y = 0$ のときは $(t, s) = (x, 0)$ となり, 条件を満たす。

さて, 点 R は AMN の内部または周上にあることより,

$$t \geq 0, s \geq 0, t+s \leq \frac{1}{2}$$

$0 < x < 1, 0 < y < 1$ より, $t \geq 0, s \geq 0$ は満たしているので, $t+s \leq \frac{1}{2}$ より,

$$\frac{x(1-y)}{1-xy} + \frac{y(1-x)}{1-xy} \leq \frac{1}{2}, 2x(1-y) + 2y(1-x) \leq 1-xy$$

$$(3x-2)y \leq 2x-1 \dots\dots\dots$$

$3x-2 > 0$ ($x > \frac{2}{3}$) のとき, より $y \leq \frac{2x-1}{3x-2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3(3x-2)}$

$3x-2 = 0$ ($x = \frac{2}{3}$) のとき, は成立しない。

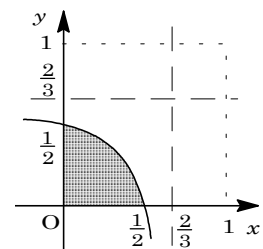
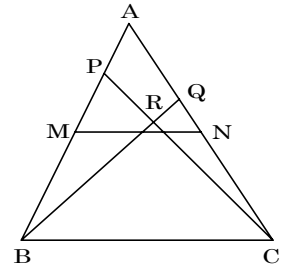
$3x-2 < 0$ ($x < \frac{2}{3}$) のとき, より $y \leq \frac{2x-1}{3x-2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3(3x-2)}$

以上, まとめて図示すると, 右図の網点部となる。なお, 境界は領域に含まれる。

この領域の面積を S とすると,

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3(3x-2)} \right\} dx = \left[\frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \log |3x-2| \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} (\log \frac{1}{2} - \log 2) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \log 2$$



[解 説]

ベクトルの標準的な問題です。計算量も適当です。

4

問題のページへ

(1) $f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを、数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき $f_1(x) = x^2$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき $f_k(x)$ が $k+1$ 次多項式であるとする。

このとき $f_k^{(2)}(x)$ は $k-1$ 次多項式となり、 $x^3 f_k^{(2)}(x)$ は $k+2$ 次多項式である。

すると、 $f_{k+1}(x) = f_k(x) + x^3 f_k^{(2)}(x)$ より、 $f_{k+1}(x)$ は $k+2$ 次多項式となる。

(i)(ii)より、 $f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式である。

さて、 $f_n(x)$ の x^{n+1} の係数を a_n とすると、 $a_1 = 1$ で、 $f_n^{(2)}(x)$ の x^{n-1} の係数は $n(n+1)a_n$ となるので、 $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^3 f_n^{(2)}(x)$ から x^{n+2} の係数を比べると、

$$a_{n+1} = n(n+1)a_n$$

$$n \geq 2 \text{ で, } a_n = a_1(1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 4) \cdots (n-1)n = (n-1)!n!$$

$n=1$ をあてはめると、 $a_1 = 0!1! = 1$ となり成立する。

よって、 $a_n = (n-1)!n!$

(2) $g_n(x)$ を x^4 , x^3 , x^2 , x の係数および定数項が 0 の 5 次以上の多項式として、

$$f_n(x) = g_n(x) + p_n x^4 + q_n x^3 + r_n x^2 + s_n x + t_n$$

$$\begin{aligned} \text{すると条件より, } f_{n+1}(x) &= f_n(x) + x^3 \{ g_n^{(2)}(x) + 12p_n x^2 + 6q_n x + 2r_n \} \\ &= f_n(x) + x^3 g_n^{(2)}(x) + 12p_n x^5 + 6q_n x^4 + 2r_n x^3 \end{aligned}$$

ここで x^4 , x^3 , x^2 , x の係数および定数項を比べると、

$$p_{n+1} = p_n + 6q_n \dots\dots, \quad q_{n+1} = q_n + 2r_n \dots\dots$$

$$r_{n+1} = r_n \dots\dots, \quad s_{n+1} = s_n \dots\dots, \quad t_{n+1} = t_n \dots\dots$$

また、 $f_1(x) = x^2$ より、 $p_1 = q_1 = 0$, $r_1 = 1$, $s_1 = t_1 = 0$ となり、

$$\text{より } r_n = 1, \quad \text{より } s_n = t_n = 0$$

$$\text{に代入して, } q_{n+1} = q_n + 2 \text{ より, } q_n = 0 + 2(n-1) = 2(n-1)$$

さらに に代入して、 $p_{n+1} = p_n + 12(n-1)$ より、 $n \geq 2$ で、

$$p_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} 12(k-1) = 6(n-1)(n-2)$$

$n=1$ をあてはめると、 $p_1 = 0$ となり成立する。

$$\text{よって, } f_n^{(1)}(x) = g_n^{(1)}(x) + 4p_n x^3 + 3q_n x^2 + 2r_n x + s_n \text{ より, } f_n^{(1)}(0) = s_n = 0$$

$$f_n^{(2)}(x) = g_n^{(2)}(x) + 12p_n x^2 + 6q_n x + 2r_n \text{ より, } f_n^{(2)}(0) = 2r_n = 2$$

$$f_n^{(3)}(x) = g_n^{(3)}(x) + 24p_n x + 6q_n \text{ より, } f_n^{(3)}(0) = 6q_n = 12(n-1)$$

$$f_n^{(4)}(x) = g_n^{(4)}(x) + 24p_n \text{ より, } f_n^{(4)}(0) = 24p_n = 144(n-1)(n-2)$$

[解 説]

(1)と(2)は同じ解法をとっています。比べる位置が異なるだけです。