

1

問題のページへ

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - a \cos x| dx \text{ に対して,}$$

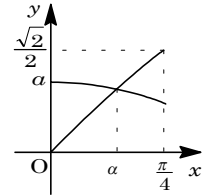
(i) $a = 0$ のとき $0 < x < \frac{\pi}{4}$ において, $\sin x - a \cos x > 0$ なので,

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - a \cos x) dx = [-\cos x - a \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii) $0 < a < 1$ のとき $0 < x < \frac{\pi}{4}$ における $\sin x - a \cos x = 0$ の

解を $x = \alpha$ とおくと,

$$\sin \alpha = a \cos \alpha, \quad a = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \dots\dots\dots (*)$$



$$f(a) = \int_0^{\alpha} -(\sin x - a \cos x) dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - a \cos x) dx$$

$$= -[-\cos x - a \sin x]_0^{\alpha} + [-\cos x - a \sin x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 \cos \alpha + 2a \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}a - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(a) = -2 \sin \alpha \frac{d\alpha}{da} + 2 \sin \alpha + 2a \cos \alpha \frac{d\alpha}{da} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -2 \sin \alpha \frac{d\alpha}{da} + 2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \frac{d\alpha}{da} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ここで, (*)より $0 < a < 1$ のとき

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ なので, $\sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ と

すると, $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{4}$ となる。

a	0	...	a_0	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$	\searrow		\nearrow	$\sqrt{2} - 1$

$$\cos \alpha_0 = \sqrt{1 - \frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{14}}{4}, \quad a_0 = \tan \alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$f(a_0) = 2 \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

(iii) $a = 1$ のとき $0 < x < \frac{\pi}{4}$ において, $\sin x - a \cos x < 0$ なので,

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -(\sin x - a \cos x) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}a - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i)(ii)(iii)より, $f(a)$ は連続関数なので, その最小値は $\frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ である。

[解 説]

$f'(a)$ を計算したところ, (*)の関係式のおかげで, 予想以上に簡単な式となりました。

2

問題のページへ

まず、楕円 $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$ に対して、4 点 $\pm(\sqrt{17}, 2\sqrt{2})$, $\pm(\sqrt{17}, -2\sqrt{2})$ から に引いた 2 本の接線は明らかに直交する。

次に、上記の 4 点以外の点 $P(a, b)$ を通る接線は、その傾きを m とすると、

$$y - b = m(x - a)$$

$$y = mx - ma + b \dots\dots\dots$$

$$\text{より、} 8x^2 + 17(mx - ma + b)^2 = 17 \cdot 8$$

$$(17m^2 + 8)x^2 - 34m(ma - b)x + 17(ma - b)^2 - 17 \cdot 8 = 0$$

重解をもつことより、

$$D/4 = 17^2 m^2 (ma - b)^2 - (17m^2 + 8) \{ 17(ma - b)^2 - 17 \cdot 8 \} = 0$$

$$17m^2 (ma - b)^2 - (17m^2 + 8) \{ (ma - b)^2 - 8 \} = 0$$

$$17 \cdot 8m^2 - 8(ma - b)^2 + 64 = 0, \quad (17 - a^2)m^2 + 2abm + 8 - b^2 = 0 \dots\dots\dots$$

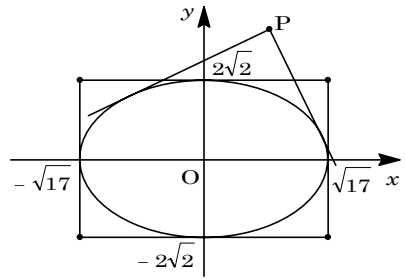
$17 - a^2 \neq 0$ より、 の実数解を $m = m_1, m_2$ とすると、2 本の接線が直交する条件は、解と係数の関係を用いて、

$$m_1 m_2 = -1, \quad \frac{8 - b^2}{17 - a^2} = -1, \quad a^2 + b^2 = 25 \dots\dots\dots$$

点 P が 4 点 $\pm(\sqrt{17}, 2\sqrt{2})$, $\pm(\sqrt{17}, -2\sqrt{2})$ のときも をみたすので、これより点 $P(a, b)$ の軌跡は、円 $x^2 + y^2 = 25$ である。

[解 説]

有名問題です。方程式 $D = 0$ をうまく計算していくことがすべてです。



3

問題のページへ

2点 B, C を xz 平面に関して対称な点とすると, $BC = 1$ より, $B(a, -\frac{1}{2}, b)$, $C(a, \frac{1}{2}, b)$ とおける。

$$AB = AC = 1 \text{ より, } a^2 + \frac{1}{4} + (b-1)^2 = 1 \dots\dots\dots(*)$$

ここで, $L(0, 0, 1+\sqrt{2})$ より, 直線 LB は,

$$(x, y, z) = (0, 0, 1+\sqrt{2}) + t(a, -\frac{1}{2}, b-1-\sqrt{2})$$

xy 平面と交わるのは, $z = 0$ から $1+\sqrt{2} + t(b-1-\sqrt{2}) = 0$, $t = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}$ のときで

ある。 $t_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}$ とおくと, $x = t_0 a$, $y = -\frac{1}{2} t_0$ から, $D(t_0 a, -\frac{1}{2} t_0, 0)$ となる。

同様にして $E(t_0 a, \frac{1}{2} t_0, 0)$ となり, ODE の面積を S とおくと,

$$S = \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot t_0 a = \frac{1}{2} t_0^2 a = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b} \right)^2 a$$

(*)より, $a^2 + \frac{1}{4} + b^2 - 2b = 0$, $a^2 = -b^2 + 2b - \frac{1}{4} = -(b-1)^2 + \frac{3}{4}$ となるので,

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b} \right)^2 \sqrt{-(b-1)^2 + \frac{3}{4}}$$

さて, $1+\sqrt{2}-b = u$ とおくと, $\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < u < \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり,

$$S = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{2u^2} \sqrt{-(\sqrt{2}-u)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{4} \sqrt{\frac{-4(u-\sqrt{2})^2 + 3}{u^4}}$$

そこで, $f(u) = \frac{-4(u-\sqrt{2})^2 + 3}{u^4}$ とおくと, $S = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{4} \sqrt{f(u)}$

$$f'(u) = \frac{-8(u-\sqrt{2})u^4 - \{-4(u-\sqrt{2})^2 + 3\} \cdot 4u^3}{u^8}$$

$$= \frac{8u^2 - 24\sqrt{2}u + 20}{u^5}$$

$$= \frac{4(\sqrt{2}u - 1)(\sqrt{2}u - 5)}{u^5}$$

したがって, $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき, $f(u)$

u	$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$...	$\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'(u)$		+	0	-	
$f(u)$		↗	4	↘	

は最大値 4 をとり, S の最大値は $\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4} \times \sqrt{4} = \frac{(1+\sqrt{2})^2}{2}$ である。

[解 説]

相似を利用して図形的に解こうか, 方程式を立てて代数的に解こうか迷いました。

4

問題のページへ

(1) $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) は単調減少関数なので,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

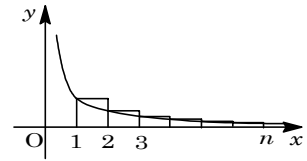
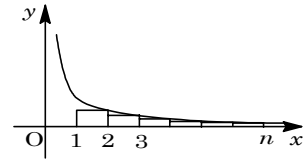
また $n \geq 2$ で, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} > \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} + \log n$$

よって, $\frac{1}{n} + \log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$

$$\frac{1}{n \log n} + 1 < \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{\log n} + 1$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{1}{n \log n} \rightarrow 0$, $\frac{1}{\log n} \rightarrow 0$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 1$



(2) $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$ とおくと,

$$f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n) + x(x-2)\dots(x-n) + \dots + x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

$x = x_n$ で極値をとることより, $f'(x_n) = 0$ となり,

$$(x_n - 1)(x_n - 2)\dots(x_n - n) + x_n(x_n - 2)\dots(x_n - n) + \dots + x_n(x_n - 1)(x_n - 2)\dots(x_n - n + 1) = 0$$

両辺 $\div x_n(x_n - 1)(x_n - 2)\dots(x_n - n)$ から,

$$\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \frac{1}{x_n - 2} + \dots + \frac{1}{x_n - n} = 0$$

$$\frac{1}{x_n} = -\frac{1}{1 - x_n} - \frac{1}{2 - x_n} - \dots - \frac{1}{n - x_n} \dots\dots\dots$$

さて, k を $0 \leq k \leq n$ の整数とすると,

$$f'(k) = k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \dots \{-(n-k)\} = (-1)^{n-k} k!(n-k)!$$

これより, $f'(0), f'(1), f'(2), \dots, f'(n-1), f'(n)$ は順に符号が変化する。

また, $f'(x)$ は n 次式から, $f'(x) = 0$ の実数解は n 個以下である。すると, 区間 $(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ に 1 つずつ実数解をもつことになる。

その最小の解を x_n とすると, $0 < x_n < 1$ となり, より $\frac{1}{x_n} = -\frac{1}{1-x_n} - \dots$ である。

よって, $1 - x_n < x_n$ より $x_n < \frac{1}{2}$ となり, まとめて $0 < x_n < \frac{1}{2}$ である。

(3) より, $\frac{1}{x_n \log n} = \frac{1}{\log n} \left(\frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{2-x_n} + \dots + \frac{1}{n-x_n} \right) \dots\dots\dots$

(2)より, $0 < x_n < \frac{1}{2}$ なので, $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{2-x_n} + \dots + \frac{1}{n-x_n}$

$$\frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{2-x_n} + \cdots + \frac{1}{n-x_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}} + \cdots + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} < 2+1+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

$$\text{よ} \text{り}, \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{x_n \log n} < \frac{1}{\log n} \left(2 + 1 + \cdots + \frac{1}{n-1} \right)$$

$$\frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{x_n \log n} < \frac{2}{\log n} + \frac{1}{\log n} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right)$$

$$(1) \text{よ} \text{り}, n \text{ のとき}, \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \rightarrow 1 \text{ なの} \text{で}, \frac{1}{x_n \log n} \rightarrow 1$$

$$\text{以上よ} \text{り}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \log n = 1$$

[解 説]

(2)の結論は、 $f(x)$ のグラフを考えると感覚的にはわかるのですが、それを証明しようとする、時間がかかってしまいます。本年度の問題で最も方針の立てにくいものでした。