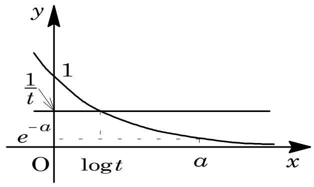
1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　(i)　$\dfrac{1}{t} \geqq 1\ (0 < t \leqq 1)$ のとき



$$S(a,\ t) = \int_0^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx = \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_0^a$$
$$= e^{-a} - 1 + \frac{a}{t}$$

(ii)　$e^{-a} \leqq \dfrac{1}{t} < 1\ (1 < t \leqq e^a)$ のとき

$e^{-x} = \dfrac{1}{t}$ の解は，$x = \log t$ より，

$$S(a,\ t) = \int_0^{\log t}\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx + \int_{\log t}^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx$$
$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x\right]_0^{\log t} + \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_{\log t}^a = -\frac{2}{t}\log t + \frac{a-2}{t} + e^{-a} + 1$$

(iii)　$\dfrac{1}{t} < e^{-a}\ (t > e^a)$ のとき

$$S(a,\ t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx = -e^{-a} + 1 - \frac{a}{t}$$

すると，$0 < t \leqq 1$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = -\dfrac{a}{t^2} < 0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に減少し，$t > e^a$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = \dfrac{a}{t^2} > 0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に増加する。

また，$1 < t \leqq e^a$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = \dfrac{2}{t^2}\log t - \dfrac{2}{t^2} - \dfrac{a-2}{t^2} = \dfrac{2\log t - a}{t^2}$ となる。このとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = 0$ の解は，$t = e^{\frac{a}{2}}$ であり，$S(a,\ t)$ の増減は右表のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	e^a
$\dfrac{dS(a,\ t)}{dt}$		$-$	0	$+$	
$S(a,\ t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

さらに，$S(a,\ t)$ は $t = 1$，$t = e^a$ において連続なので，$t = e^{\frac{a}{2}}$ で最小値をとり，

$$m(a) = S\left(a,\ e^{\frac{a}{2}}\right) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1$$

(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a\to 0}\frac{-2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1}{a^2} = \lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2$

ここで，$-\dfrac{a}{2} = b$ とおくと，$a \to 0$ のとき $b \to 0$ となり，

$$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2} = \frac{1}{4}\lim_{b\to 0}\left(\frac{e^b - 1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

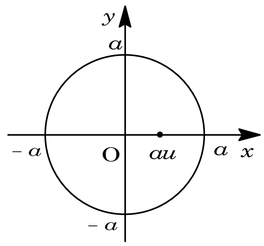
[解 説]

積分計算についての理解を問う問題です。(2)の極限は，e の定義を適用するものです。

2

問題のページへ

まず, $0 \leqq u \leqq 1$ として, 点 P は $0 \leqq t \leqq u$ のとき x 軸上を動き, $u \leqq t \leqq 1$ のとき $z>0$ の部分を直線的に動くものとする。すなわち点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は 1 秒後に点 $(au,\ 0,\ 0)$ を中心として, 半径 $1-u$ の球面上に存在することになるので,



$$(x-au)^2+y^2+z^2=(1-u)^2$$

xz 平面での断面を考えると, $y=0$ を代入して,

$$(x-au)^2+z^2=(1-u)^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて, 円①の通過する xz 平面上の領域は, ①を u に関する方程式とみたとき, $0 \leqq u \leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件としてとらえられる。

①より, $(a^2-1)u^2-2(ax-1)u+(x^2+z^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで, $f(u)=(a^2-1)u^2-2(ax-1)u+(x^2+z^2-1)$ とおくと,

まず $a>1$ より, $a^2-1>0$ となり,

$$f(1)=(a^2-1)-2(ax-1)+(x^2+z^2-1)=(x-a)^2+z^2>0$$

(i) $\dfrac{ax-1}{a^2-1}<0\ \left(0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ のとき

$f(1)>0$ なので $f(0)=x^2+z^2-1 \leqq 0$ より, $x^2+z^2 \leqq 1$

(ii) $0 \leqq \dfrac{ax-1}{a^2-1} \leqq 1\ \left(\dfrac{1}{a} \leqq x \leqq a\right)$ のとき

$f(1)>0$ なので, ②の判別式 $D=(ax-1)^2-(a^2-1)(x^2+z^2-1) \geqq 0$ より,

$$x^2-2ax-(a^2-1)z^2+a^2 \geqq 0,\ (x-a)^2-(a^2-1)z^2 \geqq 0$$

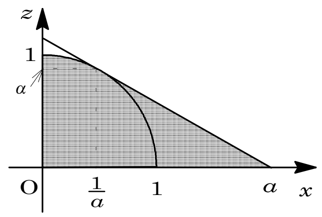
$$\left(x-a-\sqrt{a^2-1}\,z\right)\left(x-a+\sqrt{a^2-1}\,z\right) \geqq 0$$

$x-a-\sqrt{a^2-1}\,z<0$ より, $x-a+\sqrt{a^2-1}\,z \leqq 0$, $z \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}(x-a)$

(iii) $\dfrac{ax-1}{a^2-1}>1\ (x>a)$ のとき

$f(1)>0$ なので, ②は $0 \leqq u \leqq 1$ に実数解をもたない。

以上より, $z>0$ の部分で, 円①の通過する領域は右図の網点部である。ただし, $\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ とする。



そこで, この領域を z 軸まわりに回転した立体が, 点 P が $z>0$ の部分で到達し得る範囲となり, この体積を V_1 とすると,

$$V_1=\int_0^{\alpha}\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\,z\right)^2dz+\int_{\alpha}^{1}\pi(1-z^2)\,dz$$

$$=\pi\left[a^2z-a\sqrt{a^2-1}\,z^2+\frac{a^2-1}{3}z^3\right]_0^{\alpha}+\pi\left[z-\frac{1}{3}z^3\right]_{\alpha}^{1}$$

$$V_1=\pi\left\{\frac{2}{3}+(a^2-1)\alpha-a\sqrt{a^2-1}\,\alpha^2+\frac{1}{3}a^2\alpha^3\right\}$$

$\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ を代入すると，$V_1=\pi\left\{\dfrac{2}{3}+\dfrac{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}{3a}\right\}$

また，$z\leqq 0$ の部分については，点 P は原点中心で半径 a の半球の内部または表面上に到達し得るので，その体積を V_2 とすると，

$$V_2=\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\pi a^3$$

よって，求める P が到達し得る範囲の体積は，

$$V_1+V_2=\pi\left\{\frac{2}{3}+\frac{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}{3a}\right\}+\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{\pi}{3}\left\{2+2a^3+\frac{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}{a}\right\}$$

[解 説]

一瞬，半球を 2 つ合わせたものというイメージが湧きましたが，xy 平面上で図形が不連続になるわけもなく，考え直して数式処理をした解答です。おもしろい内容ですが，時間内にできるかどうかは別の問題です。

3

問題のページへ

(1)　カードを 1 回取り出したとき，番号が 1 である確率は，$P_N(1)=\dfrac{1}{N}$

カードを 2 回取り出したとき，その番号が 1 回目が 2，1 回目と 2 回目の和が 2 である確率は，$P_N(2)=\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{N^2}=\dfrac{N+1}{N^2}$

カードを 3 回取り出したとき，その番号が 1 回目が 3, 1 回目と 2 回目の和が 3, 1 回目と 2 回目と 3 回目の和が 3 である確率は,

$$P_N(3)=\frac{1}{N}+\frac{2}{N^2}+\frac{1}{N^3}=\frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(2)　1, 2, 3 の 3 枚のカードを 1 枚取り出して戻すという試行を 4 回行ったとき，2 回目までの和が 4 となる組合せは(1，3)，(2，2)，3 回目までの和が 4 となる組合せは(1，1，2)，4 回目までの和が 4 となる組合せは(1，1，1，1)なので，それらの順列を考えて，

$$P_3(4)=\frac{2+1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}=\frac{37}{81}$$

次に，同じ試行を 5 回行ったとき，2 回目までの和が 5 となる組合せは(2，3)，3 回目までの和が 5 となる組合せは(1，1，3)，(1，2，2)，4 回目までの和が 5 となる組合せは(1，1，1，2)，5 回目までの和が 5 となる組合せは(1，1，1，1，1)なので，それらの順列を考えて，

$$P_3(5)=\frac{2}{3^2}+\frac{3+3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{1}{3^5}=\frac{121}{243}$$

(3)　j 回目に取り出したカードの番号を Y_j とすると，$X_j=Y_1+Y_2+\cdots+Y_j$

ここで, N 枚のカードから 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行ったとき, j 回目($j=1,\ \cdots,\ k$)までの和が k となるのは,

$$Y_1+Y_2+\cdots+Y_j=k\ (1\leqq Y_1\leqq N,\ 1\leqq Y_2\leqq N,\ \cdots,\ 1\leqq Y_j\leqq N)$$

この方程式を満たす$(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_j)$は, $k\leqq N$ より ${}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}$ 通りなので,

$$P_N(k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}}{N^j}=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0}{N}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{N^2}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2}{N^3}+\cdots+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}$$

$$=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0N^{k-1}+{}_{k-1}\mathrm{C}_1N^{k-2}+{}_{k-1}\mathrm{C}_2N^{k-3}+\cdots+{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}=\frac{(N+1)^{k-1}}{N^k}$$

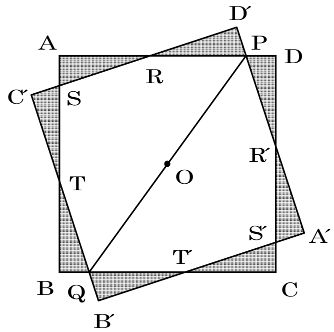
[解 説]

(3)の具体例が(1)であり，(3)の条件である $k\leqq N$ が成り立たない場合の具体例が(2)という構成です。

4

問題のページへ

正方形 ABCD を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき，二重になる部分が五角形になることより，折り目の線分の一端 P が AD 上，他端 Q が BC 上にあるとしても差し支えない。



このとき，正方形の各頂点を線分 PQ に関して対称移動し，A が A′，B が B′，C が C′，D が D′ に移ったとすると，正方形 ABCD と正方形 A′B′C′D′ は合同になる。

さて，二重になる部分は五角形 PRSTQ であるが，線対称になっていることより，$\mathrm{TQ}=\mathrm{RP}$ が成立する。これから，△TBQ と△RD′P が合同になるので，$\mathrm{BQ}=\mathrm{PD}'$ が成り立つ。

また，PD′ は PD を対称移動したので，$\mathrm{PD}'=\mathrm{PD}$ であり，$\mathrm{BQ}=\mathrm{PD}$ となる。

すると，線分 PQ は正方形 ABCD の中心 O を通り，正方形 D′C′B′A′ は正方形 ABCD を O を中心として回転した図形になる。

よって，右上図の網点をつけた 8 つの直角三角形は合同である。

ここで，$\mathrm{AS}=a$，$\mathrm{BT}=b$ とおくと，$\mathrm{ST}=1-\mathrm{AS}-\mathrm{BT}$ なので，

$$\sqrt{a^2+b^2}=1-a-b,\quad a^2+b^2=(1-a-b)^2,\quad (2a-2)b=2a-1$$

$a<\dfrac{1}{2}$ において，$b=\dfrac{2a-1}{2a-2}$

五角形 P の面積を S とすると，台形 ABQP の面積が $\dfrac{1}{2}$ より，

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ab\cdot 2=\frac{1}{2}-ab=\frac{1}{2}-a\cdot\frac{2a-1}{2a-2}=\frac{-2a^2+2a-1}{2a-2}$$

$$=-a-\frac{1}{2a-2}=1-a+\frac{1}{2-2a}-1\geqq 2\sqrt{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

等号は $1-a=\dfrac{1}{2-2a}$ のとき成立する。このとき，$(1-a)^2=\dfrac{1}{2}$ から $a=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，これは $0<a<\dfrac{1}{2}$ を満たす。

よって，五角形 P の面積の最小値は $\sqrt{2}-1$ である。

[解 説]

第 2 問に続き，本問もすごい問題です。実際に正方形を折って考えないと，イメージがつかめません。