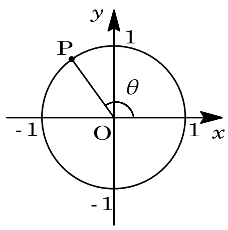
1

問題のページへ

(1)　単位円周上の点を$P(x,\ y)$とし，動径 OP に対してx軸の正の部分から反時計まわりに測った角をθとする。

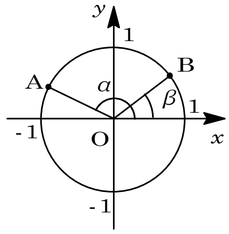


このとき，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

(2)　単位円周上の 2 点 A, B について, OA, OB に対してx軸の正の部分から反時計まわりに測った角をそれぞれα，βとすると，$A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\ \sin\beta)$となる。

$OA=OB=1$より$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$

$$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$



このとき, 2 点 A, B を O を中心として時計まわりにβだけ回転すると，点 A は点$A'\big(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta)\big)$，点 B は点$B'(1,\ 0)$にうつる。

$$A'B'^2=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

$AB=A'B'$より，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ………①

①においてβを$-\beta$に置き換えると

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，単位円周上の点を$Q(x',\ y')$とし，動径 OQ に対してx軸の正の部分から時計まわりに測った角をθとすると，$x'=\cos(-\theta)$，$y'=\sin(-\theta)$

ここで，点 Q は(1)の点 P とx軸対称となるので，$x'=x$，$y'=-y$

よって，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$となり，②より，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

①においてαを$90°-\alpha$に置き換えると

$$\cos\big(90°-(\alpha+\beta)\big)=\cos(90°-\alpha)\cos\beta+\sin(90°-\alpha)\sin\beta\ \cdots\cdots\cdots③$$

さらに，単位円周上の点を$R(x'',\ y'')$とし，動径 OR に対してy軸の正の部分から時計まわりに測った角をθとすると，$x''=\cos(90°-\theta)$，$y''=\sin(90°-\theta)$

点 R は(1)の点 P と直線$y=x$について対称となるので，$x''=y$，$y''=x$

よって，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$，$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$となり，③より，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

[解 説]

この問題で，三角関数の公式の証明が 30 年前に京大で出たのを思い出しました。

2

問題のページへ

(1)　$r_n = |z_n|$ とおくと，$r_1 = |z_1| = 1$

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = |(3+4i)z_n + 1| \leqq |3+4i||z_n| + 1 = 5r_n + 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = |(3+4i)z_n + 1| \geqq ||3+4i||z_n| - 1| = |5r_n - 1| \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$r_{n+1} + \dfrac{1}{4} \leqq 5\left(r_n + \dfrac{1}{4}\right)$，$r_n + \dfrac{1}{4} \leqq \left(r_1 + \dfrac{1}{4}\right)5^{n-1} = \dfrac{5^n}{4}$ から，$r_n < \dfrac{5^n}{4}$

また，$r_1 = 1$ なので，②より帰納的に $r_n \geqq 1$

すると②は，$r_{n+1} \geqq 5r_n - 1$，$r_{n+1} - \dfrac{1}{4} \geqq 5\left(r_n - \dfrac{1}{4}\right)$

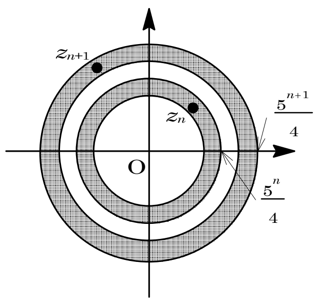
$r_n - \dfrac{1}{4} \geqq \left(r_1 - \dfrac{1}{4}\right)5^{n-1} = \dfrac{3\times 5^{n-1}}{4}$ から，$r_n > \dfrac{3\times 5^{n-1}}{4}$

以上より，$\dfrac{3\times 5^{n-1}}{4} < |z_n| < \dfrac{5^n}{4}$

(2)　(1)より，$\dfrac{3\times 5^{n-1}}{4} < |z_n| < \dfrac{5^n}{4}$，$\dfrac{3\times 5^n}{4} < |z_{n+1}| < \dfrac{5^{n+1}}{4}$

ここで $\dfrac{5^n}{4} < \dfrac{3\times 5^n}{4}$ より，z_n，z_{n+1} の存在領域は

右図のようになる。



すると $\dfrac{5^n}{4} \leqq r \leqq \dfrac{5^{n+1}}{4}$ のとき，$f(r) = n$，$n+1$

よって，$n\log 5 - \log 4 \leqq \log r \leqq (n+1)\log 5 - \log 4$

のとき，$n \leqq f(r) \leqq n+1$

$$\frac{n}{(n+1)\log 5 - \log 4} \leqq \frac{f(r)}{\log r} \leqq \frac{n+1}{n\log 5 - \log 4}$$

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\log 5 - \dfrac{1}{n}\log 4} \leqq \frac{f(r)}{\log r} \leqq \frac{1+\dfrac{1}{n}}{\log 5 - \dfrac{1}{n}\log 4}$$

$r \to +\infty$ のとき，$n \to \infty$ となるので，

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\log 5 - \dfrac{1}{n}\log 4} \to \frac{1}{\log 5},\quad \frac{1+\dfrac{1}{n}}{\log 5 - \dfrac{1}{n}\log 4} \to \frac{1}{\log 5}$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r} = \frac{1}{\log 5}$

[解 説]

(1)は最初与えられた漸化式を解いたのですが，複雑な式になったので止めました。次に数学的帰納法で証明と考えたのですが，第 2 段階がうまくいきません。しかしそのとき，証明に用いた三角不等式を漸化式に適用という方針を思いつきました。

3

問題のページへ

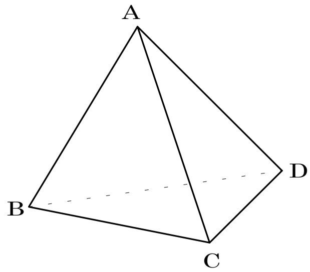
(1) 辺 AB が電流を通すかどうかで場合分けをする。

(i) 辺 AB が電流を通すとき

点 A から B に電流が流れる確率は p である。

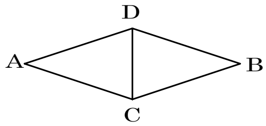
(ii) 辺 AB が電流を通さないとき

点 A から B に電流が流れない確率は $1-p$ である。



(ii-i) 辺 CD が電流を通さないとき

辺 CD が電流を通さない確率は $1-p$ で，そのとき点 A から B に電流が流れるのは，辺 AD と DB がともに電流を通すか，または辺 AC と CB がともに電流を通す場合である。その確率は，



$$(1-p)(p^2+p^2-p^4)=p^2(1-p)(2-p^2)$$

(ii-ii) 辺 CD が電流を通すとき

辺 CD が電流を通す確率は p で，そのとき点 A から B に電流が流れるのは，辺 AD, AC の少なくとも一方が電流を通し，しかも辺 DB, CB の少なくとも一方が電流を通す場合である。その確率は，

$$p\left\{(p+p-p^2)\times(p+p-p^2)\right\}=p^3(2-p)^2$$

(ii-i)(ii-ii)より，点 A から B に電流が流れる確率は，

$$(1-p)\left\{p^2(1-p)(2-p^2)+p^3(2-p)^2\right\}=p^2(1-p)(2p^3-5p^2+2p+2)$$

(i)(ii)より，求める点 A から B に電流が流れる確率は，

$$p+p^2(1-p)(2p^3-5p^2+2p+2)=-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p$$

(2) (1)より点 B から A に電流が流れる確率は $-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p$ で，同様に考えると，点 E から F に電流が流れる確率も同じである。

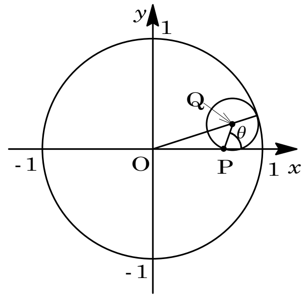
よって，点 B から F に電流が流れる確率は $(-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p)^2$ となる。

[解 説]

点 A から B に電流が流れる確率を求めようか，それとも流れない確率を求めようかと迷ってしまいました。結局，前者の方で解を考えましたが，辺 AB の状態，さらに辺 CD の状態で場合分けが必要でした。なお，$p=\dfrac{1}{2}$ とすると，文系の第 4 問になります。

$\boxed{4}$

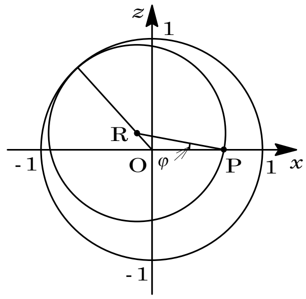
問題のページへ



条件(b)より点Pは xy 平面と xz 平面の交線である x 軸上にある。そこで，$\mathrm{P}(k,\ 0,\ 0)$ とおくと，対称性から $0 \leqq k < 1$ とすることができる。

A の中心を $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1,\ 0)$，$B$ の中心を $\mathrm{R}(x_2,\ 0,\ z_2)$ とおくと，対称性より $y_1 \geqq 0$，$z_2 \geqq 0$ とすることができ，さらに A と B は1点のみを共有することから，一般性を失うことなく，$x_2 \leqq k \leqq x_1$ としてもよい。

さて，A の半径を r_1，B の半径を r_2 とすると，r_1，r_2 が最大となるのは，円板 A, B が半径1の円に内接する場合である。



まず，角 θ を図のように設定すると $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となり，△OPQ に余弦定理を適用し，

$$(1-r_1)^2 = r_1{}^2 + k^2 - 2r_1 k\cos(\pi-\theta)$$

$$2r_1(1+k\cos\theta) = 1-k^2,\quad r_1 = \frac{1-k^2}{2(1+k\cos\theta)}$$

すると，$\cos\theta = 0$ のとき r_1 は最大値 $r_{1\max} = \dfrac{1-k^2}{2}$ をとる。

また，角 φ を図のように設定すると $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となり，△OPR に余弦定理を適用し，

$$(1-r_2)^2 = r_2{}^2 + k^2 - 2r_2 k\cos\varphi$$

$$2r_2(1-k\cos\varphi) = 1-k^2,\quad r_2 = \frac{1-k^2}{2(1-k\cos\varphi)}$$

すると，$\cos\varphi = 1$ のとき r_2 は最大値 $r_{2\max} = \dfrac{1-k^2}{2(1-k)} = \dfrac{1+k}{2}$ をとる。

よって，$r_1 + r_2$ の最大値は，

$$r_{1\max} + r_{2\max} = \frac{1-k^2}{2} + \frac{1+k}{2} = -\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 1 = -\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

これより，$k = \dfrac{1}{2}$ のとき，$r_1 + r_2$ は最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

[解　説]

空間における円の配置の問題ですが，立式する前にいろいろ状況を設定しなくてはいけません。ここが，ややこしいところです。

5　問題のページへ

(1)　$1 \leqq n \leqq 2^k - 1$として，

$$ {}_{2^k}\mathrm{C}_n = \frac{(2^k)!}{n!(2^k - n)!} = \frac{2^k \cdot (2^k - 1)!}{n \cdot (n-1)!(2^k - n)!} = \frac{2^k}{n}\ {}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1} $$

よって，$n\ {}_{2^k}\mathrm{C}_n = 2^k\ {}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ………①

$0 \leqq n-1 \leqq 2^k - 2$ より，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ は自然数となるので，①の右辺は2^kの倍数である。すると，左辺も2^kの倍数となるが，$1 \leqq n \leqq 2^k - 1$なので${}_{2^k}\mathrm{C}_n$ は偶数である。

(2)　一般的に${}_m\mathrm{C}_n = {}_{m-1}\mathrm{C}_n + {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$　$(1 \leqq n \leqq m-1)$ ………②

②より，${}_{m-1}\mathrm{C}_n = {}_m\mathrm{C}_n - {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ………③

③において$m = 2^k$ とすると，

$${}_{2^k-1}\mathrm{C}_n = {}_{2^k}\mathrm{C}_n - {}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1} \text{ ………④}$$

まず，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_0 = 1$ は奇数で，また(1)より${}_{2^k}\mathrm{C}_n$　$(1 \leqq n \leqq 2^k - 1)$ は偶数なので，④の漸化式を用いると，帰納的に${}_{2^k-1}\mathrm{C}_1$，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_2, \cdots$，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて奇数となる。

すなわち，$m = 2^k - 1$（k は自然数）のとき，${}_m\mathrm{C}_n$　$(0 \leqq n \leqq m)$ はすべて奇数となる。

次に，②において$m = 2^k + 1$とすると，

$${}_{2^k+1}\mathrm{C}_n = {}_{2^k}\mathrm{C}_n + {}_{2^k}\mathrm{C}_{n-1} \text{ ………⑤}$$

(1)より${}_{2^k}\mathrm{C}_n$　$(1 \leqq n \leqq 2^k - 1)$ は偶数なので，⑤の漸化式を用いると，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_2$，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_3, \cdots$，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて偶数となる。

同様にすると，帰納的に${}_{2^k+2}\mathrm{C}_n$　$(3 \leqq n \leqq 2^k - 1)$，${}_{2^k+3}\mathrm{C}_n$　$(4 \leqq n \leqq 2^k - 1)$，……，${}_{2^{k+1}-3}\mathrm{C}_n$　$(2^k - 2 \leqq n \leqq 2^k - 1)$，${}_{2^{k+1}-2}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて偶数となる。

すなわち，$m \neq 2^k - 1$（k は自然数）のとき，${}_m\mathrm{C}_n$　$(0 \leqq n \leqq m)$のうち少なくとも一つは偶数である。

以上より，${}_m\mathrm{C}_n$　$(0 \leqq n \leqq m)$がすべて奇数であるのは，$m = 2^k - 1$（k は自然数）のときだけである。

[解　説]

問題を読んで思い出したのは，今年の正月に読んだベストセラー本，エンツェンスベルガー『数の悪魔』(晶文社)です。この中に偶数だけ明るく，奇数は暗くなっている悪魔の作ったパスカルの三角形が出ています。135 ページに載っているこの図を見ると，本問はすべて明らかなのですが，「明らか」では示しがつかないので，数学の言葉で言い直しました。上の解にはパスカルの「パ」の字も出ていませんが，この図のイメージをもとに書いています。

6

問題のページへ

まず，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}(e^{\pi}-1) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx$

$(e^x \cos 2x)' = e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x$ ………①

$(e^x \sin 2x)' = e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x$ ………②

①②より，$5e^x \cos 2x = (e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x)'$

$e^x \cos 2x = \dfrac{1}{5}\left\{ e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)\right\}'$

よって，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx = \frac{1}{5}\Big[e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$

以上より，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(e^{\pi}-1) - \frac{1}{10}(e^{\pi}-1) = \frac{2}{5}(e^{\pi}-1)$

すると，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx > 8 \iff \frac{2}{5}(e^{\pi}-1) > 8 \iff e^{\pi} > 21$

ここで，$e>2.7$，$\pi>3.1$ より，

$e^{\pi} > 2.7^{3.1} = 2.7^{3+0.1} = 2.7^3 \times 2.7^{0.1} = 19.683 \times 2.7^{0.1}$ ………③

さて，二項定理より，

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 1 + {}_{10}C_1\frac{1}{10} + {}_{10}C_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + {}_{10}C_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + {}_{10}C_4\left(\frac{1}{10}\right)^4 + {}_{10}C_5\left(\frac{1}{10}\right)^5 + \cdots\cdots + {}_{10}C_9\left(\frac{1}{10}\right)^9 + \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$$

$$< 1 + 1 + 45\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 120\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 210\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4 + 252\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^5 \times 6$$

$$= 2.60612 < 2.7$$

よって，$1.1^{10} < 2.7 \iff 2.7^{0.1} > 1.1$ ………④

③④より，$e^{\pi} > 19.683 \times 1.1 = 21.6513 > 21$ となるので，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx > 8$ である。

[解 説]

$e^{\pi}>21$ まではすぐに求まるのですが，問題はその後でした。e も π も小数第 2 位を切り捨てるなどというかなり荒っぽいやり方で e^{π} を評価しましたが，これで題意の不等式を示すことができました。なお，1.1^{10} を考えた根拠は，21 を 19.683 で割った商からというのは言うまでもありません。