1　解答解説のページへ

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z \leqq n \\ -x+y-z \leqq n \\ x-y-z \leqq n \\ -x-y+z \leqq n \end{cases}$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面に 2 つの円

$$C_0 : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \qquad C_1 : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

をとり，C_2 を x 軸と C_0，C_1 に接する円とする。さらに，$n = 2,\ 3, \cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}，C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。C_n の半径を r_n，C_n と x 軸の接点を $(x_n,\ 0)$ として，

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{2r_n}}, \qquad p_n = q_n x_n$$

とおく。

(1)　q_n は整数であることを示せ。

(2)　p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

(3)　α を $\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす正の数として，不等式

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{2}{3}|x_n - \alpha|$$

を示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 a に対して $k \leqq a < k+1$ をみたす整数 k を $[\,a\,]$ で表す。

n を正の整数として,

$$f(x) = \frac{x^2(2\cdot 3^3\cdot n - x)}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}$$

とおく。$36n+1$ 個の整数

$$[\,f(0)\,],\ [\,f(1)\,],\ [\,f(2)\,],\cdots\cdots,\ [\,f(36n)\,]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos\theta,\ \sin\theta),\ \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

をとり，点 P_n，Q_n，$n = 1,\ 2, \cdots$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - (\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4\left\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - (\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\right\}$$

で定める。ただし，O は原点で，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ および $\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ はベクトルの内積を表す。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = (x_n,\ y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。

さらに，このような θ に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} y_n$$

を求めよ。

$\boxed{6}$ 解答解説のページへ

xyz 空間に 5 点 A$(1,\ 1,\ 0)$, B$(-1,\ 1,\ 0)$, C$(-1,\ -1,\ 0)$, D$(1,\ -1,\ 0)$, P$(0,\ 0,\ 3)$ をとる。四角錐 PABCD の

$$x^2+y^2 \geqq 1$$

をみたす部分の体積を求めよ。