1

解答解説のページへ

a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

N を 5 以上の整数とする。1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件 1 : S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。

条件 2 : S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l,\ l+1,\ \cdots\cdots,\ l+k-1\}$ と表される集合を指す。たとえば $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{7,\ 8,\ 9\}$，$\{8,\ 9,\ 10\}$ を含む。

(1)　条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。

(2)　条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y=x^2+ax+b$ は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA=LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2)　正の整数 $a,\ b$ が $a>b$ を満たしているとする。このとき，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA=LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。

(3)　$a,\ b$ は(2)の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4)　${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

1

問題のページへ

曲線$C: y = ax^3 - 2x\ (a > 0)$……①と円: $x^2 + y^2 = 1$……②を連立して,

$$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = 1,\ a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

曲線①と円②の共有点の個数が 6 個である条件は, ③は 6 個の実数解をもつことに対応し, さらに$x = 0$が③の解でないことに注意して, $x^2 = t > 0$ とおくと, ③より,

$$a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots④$$

すると, $x = \pm\sqrt{t}$ から, 求める条件は, ④が 3 個の正の実数解をもつことになる。

ここで, $f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - 1$ とおくと,

$$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5$$
$$= (at - 1)(3at - 5)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	-1	↗		↘		↗

これより, $f(t)$ の増減は右表のようになり, 求める条件は,

$$f\left(\frac{1}{a}\right) > 0 \cdots\cdots\cdots⑤,\quad f\left(\frac{5}{3a}\right) < 0 \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より, $\frac{1}{a} - \frac{4}{a} + \frac{5}{a} - 1 < 0$ となり, $\frac{2}{a} > 1$ から $a < 2$

⑥より, $\frac{125}{27a} - \frac{100}{9a} + \frac{25}{3a} - 1 < 0$ となり, $\frac{50}{27a} < 1$ から $a > \frac{50}{27}$

以上より, 求める a の範囲は $\frac{50}{27} < a < 2$ である。

［解 説］

曲線と円の共有点の個数についての基本的な問題です。方程式の実数解の個数に言い換える方針で解の流れができ, しかも導関数がうまく因数分解できるというオマケも付いています。

2

問題のページへ

(1)　1 以上 $2N$ 以下の整数$(N \geqq 5)$から，1 を含む相異なる N 個の整数を選び，この選んだ数の集合を S とする。

　このとき，S が連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない選び方は，

(i)　S が $2N$ を含まないとき

　$S=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ 2N-1\}$だけより，選び方は 1 通りである。

(ii)　S が $2N$ を含むとき

　S に含まれない連続する 2 個の整数が 1 組だけあり，具体的には，

$$(2,\ 3),\ (4,\ 5),\ (6,\ 7),\ \cdots\cdots,\ (2N-2,\ 2N-1)$$

　これより，S が $2N$ を含む選び方は $N-1$ 通りである。

(i)(ii)より，求める選び方は，$1+(N-1)=N$ 通りである。

(2)　連続する $N-2$ 個の整数からなる集合 T とし，S が T を少なくとも 1 つ含む選び方は，$N-2 \geqq 3$ に注意すると，

(i)　$T=\{1,\ 2,\ \cdots,\ N-2\}$のとき

　S に含まれる残りの 2 個の整数を，$N-1,\ N,\ \cdots,\ 2N$ の $N+2$ 個から選ぶことより，${}_{N+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}(N+2)(N+1)$ 通りの場合がある。

(ii)　$T=\{k,\ k+1,\ \cdots,\ k+N-3\}\ (k=3,\ 4,\ \cdots,\ N+3)$のとき

・$T=\{3,\ 4,\ \cdots,\ N\}$のとき

　1 以外に，S に含まれるもう 1 個の整数を，$N+1,\ N+2,\ \cdots,\ 2N$ の N 個から選ぶことより，${}_N\mathrm{C}_1=N$ 通りの場合がある。

・$T=\{4,\ 5,\ \cdots,\ N+1\}$のとき

　1 以外に，S に含まれるもう 1 個の整数を，2 または $N+2,\ N+3,\ \cdots,\ 2N$ の N 個の整数から選ぶことより，${}_N\mathrm{C}_1=N$ 通りの場合がある。

・$T=\{5,\ 6,\ \cdots,\ N+2\}$のとき

　1 以外に，S に含まれるもう 1 個の整数を，2，3 または $N+3,\ N+4,\ \cdots,\ 2N$ の N 個の整数から選ぶことより，${}_N\mathrm{C}_1=N$ 通りの場合がある。

以下，同様に考えて，

・$T=\{N+3,\ N+4,\ \cdots,\ 2N\}$のとき

　1 以外に，S に含まれるもう 1 個の整数を，2，3，$\cdots$，$N+1$ の N 個の整数から選ぶことより，${}_N\mathrm{C}_1=N$ 通りの場合がある。

以上より，$T=\{k,\ k+1,\ \cdots,\ k+N-3\}$のとき，$N(N+1)$ 通りの場合がある。

(i)(ii)より，求める選び方は，

$$\frac{1}{2}(N+2)(N+1)+N(N+1)=\frac{1}{2}(N+1)(3N+2)\ \text{通り}$$

［解 説］

集合を題材にした場合の数の問題です。数え漏れが起こったり，また重複して数えたりすることを防ぐために，具体的に$N=5$の場合を考え，解答例を作成しています。

3

問題のページへ

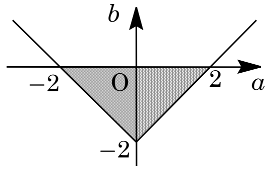
(1)　放物線$C: y=x^2+ax+b$……①と放物線$y=-x^2$……②を連立して，

$$x^2+ax+b=-x^2,\ 2x^2+ax+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

放物線①②が$-1<x<0$と$0<x<1$に 2 つの共有点をもつので，③の実数解が$-1<x<0$と$0<x<1$に存在することになり，$f(x)=2x^2+ax+b$とおくと，

$$f(-1)=2-a+b>0,\ f(0)=b<0,\ f(1)=2+a+b>0$$

まとめると，$b>a-2$，$b>-a-2$，$b<0$………④



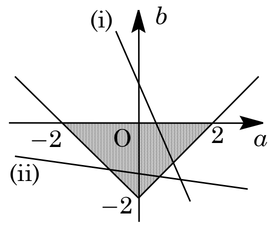
これより，点$(a,\ b)$のとりうる範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含まない。

(2)　連立不等式④を満たす$(a,\ b)$のもとで，①より，

$$b=-xa-x^2+y\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

すると，放物線Cが通過する$(x,\ y)$は，直線⑤が(1)の網点部と共有点をもつ条件として求められる。まず，直線⑤の b 切片$-x^2+y$に注意すると，通過点が$(a,\ b)=(2,\ 0)$のとき$-x^2+y=2x$，$(a,\ b)=(-2,\ 0)$のとき$-x^2+y=-2x$，$(a,\ b)=(0,\ -2)$のとき$-x^2+y=-2$となる。

これより，直線⑤の傾き$-x$の値で場合分けをすると，

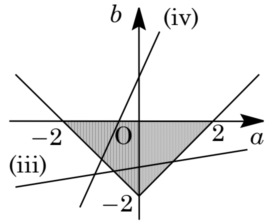


(i)　$-x<-1\ (x>1)$のとき

$$-2x<-x^2+y<2x,\ x^2-2x<y<x^2+2x$$

(ii)　$-1\leqq -x<0\ (0<x\leqq 1)$のとき

$$-2<-x^2+y<2x,\ x^2-2<y<x^2+2x$$



(iii)　$0\leqq -x<1\ (-1<x\leqq 0)$のとき

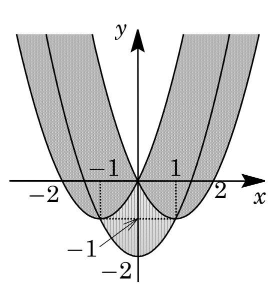
$$-2<-x^2+y<-2x,\ x^2-2<y<x^2-2x$$

(iv)　$-x\geqq 1\ (x\leqq -1)$のとき

$$2x<-x^2+y<-2x,\ x^2+2x<y<x^2-2x$$

(i)〜(iv)より，領域の境界線は，$y=x^2-2x$……⑥

$$y=x^2+2x\ \cdots\cdots⑦,\ y=x^2-2\ \cdots\cdots⑧$$



⑥⑦の交点は$(0,\ 0)$，⑥⑧の交点は$(1,\ -1)$，⑦⑧の交点は$(-1,\ -1)$であることより，放物線 C の通りうる範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

［解　説］

放物線の通過領域についての標準的な問題です。条件が連立不等式で与えられているので，図を利用した処理をしました。要演習の 1 題です。

4

問題のページへ

(1)　正の奇数 K, L と正の整数 A, B に対して，$KA = LB$ ………①

ここで, K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいとき,

$K - L = 4n$　(n は整数)………②

②より，$K = L + 4n$ となり，①に代入すると,

$(L+4n)A = LB$，$L(A-B) = -4nA$

$-4nA$ は 4 の倍数なので $L(A-B)$ も 4 の倍数となるが, L は奇数であることより，$A-B$ が 4 の倍数となる。

すなわち, A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しい。

(2)　正の整数 $a, b\,(a > b)$ に対して，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ とすると,

$$A = \frac{{}_{4a+1}\mathrm{P}_{4b+1}}{(4b+1)!} = \frac{(4a+1)4a(4a-1)(4a-2)\cdots(4a-4b+2)(4a-4b+1)}{(4b+1)4b(4b-1)(4b-2)\cdots2\cdot1}$$

ここで，$r_0 = 4a(4a-4)\cdots(4a-4b+4)$，$r_1 = (4a+1)(4a-3)\cdots(4a-4b+1)$

$r_2 = (4a-2)(4a-6)\cdots(4a-4b+2)$，$r_3 = (4a-1)(4a-5)\cdots(4a-4b+3)$

また，$s_0 = 4b(4b-4)\cdots8\cdot4$，$s_1 = (4b+1)(4b-3)\cdots5\cdot1$

$s_2 = (4b-2)(4b-6)\cdots6\cdot2$，$s_3 = (4b-1)(4b-5)\cdots7\cdot3$

すると，$A = \dfrac{r_0\,r_1\,r_2\,r_3}{s_0\,s_1\,s_2\,s_3}$ となり，$\dfrac{r_0}{s_0} = \dfrac{a(a-1)\cdots(a-b+1)}{b(b-1)\cdots2\cdot1} = \dfrac{{}_{a}\mathrm{P}_{b}}{b!} = {}_{a}\mathrm{C}_{b} = B$

$$\frac{r_2}{s_2} = \frac{(2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1)}{(2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1}$$

これより，$A = B\cdot\dfrac{r_1\,r_3\,(2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1)}{s_1\,s_3\,(2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1}$ ………③

ここで，$K = s_1\,s_3\,(2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1$，$L = r_1\,r_3\,(2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1)$ とおくと, $K,\ L$ は正の奇数であり, ③から $A = B\cdot\dfrac{L}{K}$ となり，$KA = LB$ が成り立つ。

(3)　以下，mod 4 で記すと，$4a \equiv 4b \equiv 0$ より,

$r_1 = (4a+1)(4a-3)\cdots(4a-4b+1) \equiv (4b+1)(4b-3)\cdots(4b-4b+1) = s_1$

$r_3 = (4a-1)(4a-5)\cdots(4a-4b+3) \equiv (4b-1)(4b-5)\cdots(4b-4b+3) = s_3$

また，$a-b$ が 2 で割り切れることより, a と b の偶奇は一致し,

(i)　a, b がともに偶数のとき　$2a \equiv 2b \equiv 0$

(ii)　a, b がともに奇数のとき　$2a \equiv 2b \equiv 2$

(i)(ii)より, a, b の偶奇にかかわらず，$2a \equiv 2b$ が成り立ち,

$$\begin{aligned}(2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1) &\equiv (2b-1)(2b-3)\cdots(2b-2b+1)\\ &= (2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1\end{aligned}$$

以上より，$r_1\,r_3\,(2a-1)(2a-3)\cdots(2a-2b+1) \equiv s_1\,s_3\,(2b-1)(2b-3)\cdots3\cdot1$ が成り立つので，$L \equiv K$ すなわち K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しい。

すると，(1)(2)の結果から，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは $B={}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい。

(4)　(3)の結果を利用すると，

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37}={}_{4\times505+1}\mathrm{C}_{4\times9+1}\equiv{}_{505}\mathrm{C}_9={}_{4\times126+1}\mathrm{C}_{4\times2+1}\equiv{}_{126}\mathrm{C}_2$$

これより，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りは ${}_{126}\mathrm{C}_2$ を 4 で割った余りと等しく，

$${}_{126}\mathrm{C}_2=\frac{126\times125}{2}=63\times125\equiv3\times1\equiv3$$

よって，${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りは 3 である。

［解　説］

二項係数を題材にした論証問題です。(1)～(3)の証明結果が, (4)の求値問題にうまくつながっています。ただ, 証明の記述方法はやや面倒です。