1

問題のページへ

(1) $m \geqq 2$ のとき，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて自然数であり，$m \geqq 3$ では，$2 \leqq k \leqq m-1$ において，

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} $$

ここで，m が素数のとき，m は $k!\,(k=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$ では割り切れないので，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて m の倍数となる。

すると，${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であることから，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は，$d_m = m$ である。

なお，$m=2$ のときは，${}_2\mathrm{C}_1 = 2$ となり，$d_m = m$ を満たしている。

(2) すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，数学的帰納法よって示す。

(i) $k=1$ のとき

$k^1 - k = 0$ は，明らかに d_m で割り切れる。

(ii) $k=l$ のとき

$l^m - l$ が d_m で割り切れると仮定すると，

$$ \begin{aligned} (l+1)^m-(l+1) &= l^m + {}_m\mathrm{C}_1\, l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\, l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\, l^2 + ({}_m\mathrm{C}_{m-1}-1)\,l \\ &= (l^m - l) + {}_m\mathrm{C}_1\, l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\, l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\, l^2 + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\, l \end{aligned} $$

(1)より，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は d_m で割り切れるので，$(l+1)^m-(l+1)$ は d_m で割り切れる。

(i)(ii)より，すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れる。

(3) (2)より, (ii)の証明の式において，$l+1=0\ (l=-1)$ とおくと, m が偶数から,

$$ 0 = 1-(-1) - {}_m\mathrm{C}_1 + {}_m\mathrm{C}_2 - \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2} - {}_m\mathrm{C}_{m-1} $$

$$ {}_m\mathrm{C}_1 - {}_m\mathrm{C}_2 + \cdots - {}_m\mathrm{C}_{m-2} + {}_m\mathrm{C}_{m-1} = 2 $$

すると，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は, 2 の約数となる。

さらに，$d_2 = 2$，$d_6 = 1$ から，d_m は 1 または 2 である。

[解 説]

(2)までは，文系と共通の標準的な問題です。ただ，(3)は，上記のように 5 行程度で書けてしまいますが，思いつくまでに，制限時間をかなり超えてしまいました。

2

問題のページへ

(1) 条件より，$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}r\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sr\\s\end{pmatrix}$なので，$A\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&sr\\c&s\end{pmatrix}$となり，

$$B=\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-r\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&sr\\c&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-rc&0\\c&s\end{pmatrix}$$

(2) (1)より，$B^n=\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A^n\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}$となり，条件から，

$$\begin{pmatrix}z_n\\w_n\end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A^n\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-r\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n-ry_n\\y_n\end{pmatrix}$$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-ry_n)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

(3) $a-rc=t$とおくと，$B=\begin{pmatrix}t&0\\c&s\end{pmatrix}$となり，$B^2$，$B^3$，…と計算すると，

$$B^2=\begin{pmatrix}t^2&0\\c(t+s)&s^2\end{pmatrix},\quad B^3=\begin{pmatrix}t^3&0\\c(t^2+ts+s^2)&s^3\end{pmatrix}$$

すると，$B^n=\begin{pmatrix}t^n&0\\cp_n&s^n\end{pmatrix}$，$p_n=t^{n-1}+t^{n-2}s+\cdots+ts^{n-2}+s^{n-1}$……(＊)と予測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$のとき　明らかに成立する。

(ii) $n=k$のとき　成立を仮定すると，

$$B^{k+1}=\begin{pmatrix}t^k&0\\cp_k&s^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t&0\\c&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^{k+1}&0\\ctp_k+cs^k&s^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^{k+1}&0\\c(tp_k+s^k)&s^{k+1}\end{pmatrix}$$

(i)(ii)より，すべての自然数nに対して，(＊)が成立する。

そこで，$\begin{pmatrix}z_n\\w_n\end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^n\\cp_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^n\\c(t^{n-1}+t^{n-2}s+\cdots+s^{n-1})\end{pmatrix}$となり，

$$z_n=t^n,\quad w_n=c(t^{n-1}+t^{n-2}s+\cdots+s^{n-1})$$

(2)から，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$より$-1<t<1$となり，また条件から$s>1$なので，

$$\lim_{n\to\infty}w_n=\lim_{n\to\infty}c(t^{n-1}+t^{n-2}s+\cdots+s^{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{c(t^n-s^n)}{t-s}$$

$n\to\infty$のとき，$t^n\to 0$，$s^n\to\infty$となり，$\lim\limits_{n\to\infty}w_n=0$から，$c=0$である。

このとき，$-1<a-rc<1$から，$-1<a<1$すなわち$|a|<1$となる。

[解 説]

行列のn乗と数列の極限の融合問題で，丁寧な誘導がついています。

3

問題のページへ

(1)　まず，操作(A)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っているのは，いずれかの色の玉が 2 回出て，他の色の玉は 1 回ずつ出る場合より，その確率は，

$$ {}_4C_1\cdot\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{4^3} $$

また，同様に，操作(B)を 5 回行い，R に 4 色すべての玉が入っている確率も $\dfrac{15}{4^3}$ から，操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行ったとき，L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 は，

$$ P_1=\frac{15}{4^3}\times\frac{15}{4^3}=\frac{225}{4096} $$

(2)　操作(C)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っているのは，操作(A)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っている場合より，その確率 P_2 は，

$$ P_2=\frac{15}{4^3}=\frac{15}{64} $$

(3)　操作(C)を 10 回行い，L にも R にも 4 色すべての玉が入っているのは，操作(A)を 10 回行い，4 色すべての玉が少なくとも 2 回ずつ出る場合である。

(i)　いずれかの色の玉が 4 回出て，他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$$ {}_4C_1\cdot\frac{10!}{4!2!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8} $$

(ii)　2 つの色の玉が 3 回ずつ出て，他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$$ {}_4C_2\cdot\frac{10!}{3!3!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8} $$

(i)(ii)より，$P_3=\dfrac{3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}+\dfrac{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}=\dfrac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}$ となり，

$$ \frac{P_3}{P_1}=\frac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}\cdot\frac{4^6}{3^2\cdot5^2}=\frac{63}{16} $$

[解　説]

どういう訳か，最初は余事象で考えようとして深みにはまってしまいました。考え直した普通の解を上に記しました。なお，(2)は(3)の誘導でしょうが，不安になってしまう設問です。

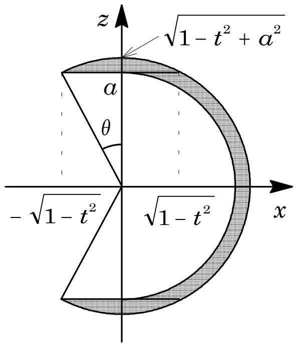
4

問題のページへ

(1)　円板 D_1 を平面 $y=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ で切断したとき，その切り口は，

$$x^2+t^2\leqq 1,\quad z=a$$
$$-\sqrt{1-t^2}\leqq x\leqq\sqrt{1-t^2},\quad z=a$$

すると，D_1 を y 軸のまわりに $180°$ 回転して D_2 に重ねる間に D_1 が通る部分 E を，平面 $y=t$ で切断したときの切り口は，右図の網点部となる。



この切り口の $x\geqq 0$ の部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{1-t^2+a^2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi a^2=\frac{1}{2}\pi(1-t^2)$$

よって，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積 $W(a)$ は，

$$W(a)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\pi(1-t^2)\,dt=\pi\int_0^1(1-t^2)\,dt=\frac{2}{3}\pi$$

(2)　E の平面 $y=t$ での切り口において，$x\leqq 0$ の部分の面積 $S(t)$ は，右上図のように角 θ を設定すると，

$$S(t)=2\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2+a^2}\right)^2\theta-\frac{1}{2}a\sqrt{1-t^2}\right\}=(1-t^2+a^2)\theta-a\sqrt{1-t^2}$$

さて，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\theta<\tan\theta=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{a}$ であることを用いると，

$$0<S(t)<\frac{(1-t^2+a^2)\sqrt{1-t^2}}{a}-a\sqrt{1-t^2}=\frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{a}\leqq\frac{1}{a}$$

ここで，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\leqq 0\}$ との共通部分の体積を $U(a)$ とすると，

$$0<U(a)<\int_{-1}^{1}\frac{1}{a}\,dt=\frac{2}{a}$$

これより，$a\to\infty$ のとき，$U(a)\to 0$ となるので，

$$\lim_{a\to\infty}V(a)=\lim_{a\to\infty}\{W(a)+U(a)\}=\frac{2}{3}\pi$$

[解 説]

東大で頻出の立体の求積問題です。題意を読み取り，軸に垂直な切り口を考えるという常套手段で解決できます。なお，(2)は結論を予想して不等式を立てています。

5

問題のページへ

(1)　$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ とおくと，

$$f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)-\frac{x-1}{x}\log(1-x)=\frac{1}{x}\{\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)\}$$

さらに，$g(x)=\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)+\frac{x-1}{1-x}=-\frac{x}{1+x}-\log(1-x)$$

$$g''(x)=-\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		↘	0	↗	

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗	0	↗	

これより，$g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)$ は単調に増加し，$-1<x<0$ のとき $g(x)<0$，$0<x<1$ のとき $g(x)>0$ となる。

すると，$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，

$$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}g(x)>0$$

よって，$\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ………(＊)

(2)　(＊)より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$ となり，

$$(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$$

$x=-\dfrac{1}{100}$ とおくと，$0.9999^{101}<0.99$

また，(＊)より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ となり，

$$1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

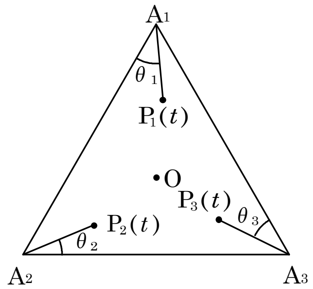
$x=\dfrac{1}{100}$ とおくと，$0.99<0.9999^{100}$

以上より，$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ が成り立つ。

[解 説]

微分法の不等式への応用問題です。なお，(2)の式変形については，結論の不等式を $(1-10^{-4})^{1+10^2}<1-10^{-2}<(1-10^{-4})^{10^2}$ とみて方針を立てました。

6　　　問題のページへ



(1)　$A_1P_1(t)=A_2P_2(t)=t$ より，

$$\overrightarrow{A_1P_1(t)}=t\overrightarrow{A_1B_1}=t\overrightarrow{e_1}$$

$$\overrightarrow{A_2P_2(t)}=\overrightarrow{A_1A_2}+t\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{a_1}+t\overrightarrow{e_2}$$

これより，$\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)}=\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})$

条件より，$|\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)}|\leqq 1$ なので，

$$|\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})|^2\leqq 1$$

$$|\overrightarrow{a_1}|^2-2t\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})+t^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2\leqq 1$$

$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と $\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度が θ より，

$$t^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2-2t|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\cos\theta+|\overrightarrow{a_1}|^2-1\leqq 0\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす $t>0$ が存在する条件は，$\cos\theta>0$ のもとで，

$$D/4=|\overrightarrow{a_1}|^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2\cos^2\theta-|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2(|\overrightarrow{a_1}|^2-1)\geqq 0$$

$$|\overrightarrow{a_1}|^2(\cos^2\theta-1)+1\geqq 0,\ \sin^2\theta\leqq\frac{1}{|\overrightarrow{a_1}|^2}=\frac{1}{1000^2}$$

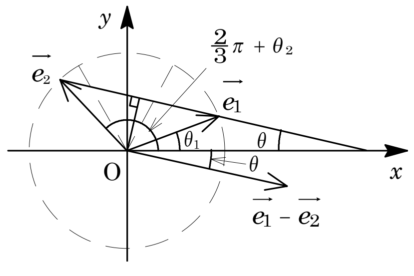
よって，$|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ ……②となる。

(2)　まず，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ を満たす α を用いると，②の不等式の解は，

$$0\leqq\theta\leqq\alpha\cdots\cdots\cdots③$$

さて，$\theta_1=\angle B_1A_1A_2$，また $\theta_2=\angle B_2A_2A_3$ より $\angle B_2A_2A_1=\dfrac{\pi}{3}-\theta_2$ となる。そこで，$\overrightarrow{a_1}$ を x 軸の正の向きとしてとると，

(i)　$\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\geqq\theta_1\left(\theta_1+\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき

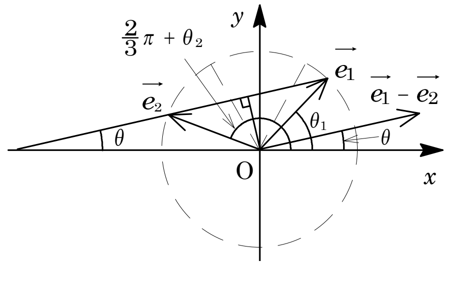


右図より，$\dfrac{1}{2}\left(\theta_1+\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$$\theta_1+\frac{2}{3}\pi+\theta_2=\pi-2\theta$$

よって，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}-2\theta$

(ii)　$\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\leqq\theta_1\left(\theta_1+\theta_2\geqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき



右図より，$\dfrac{1}{2}\left(\theta_1+\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2\right)=\dfrac{\pi}{2}+\theta$

$$\theta_1+\frac{2}{3}\pi+\theta_2=\pi+2\theta$$

よって，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}+2\theta$

(i)(ii)より，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}\pm 2\theta$ ………④

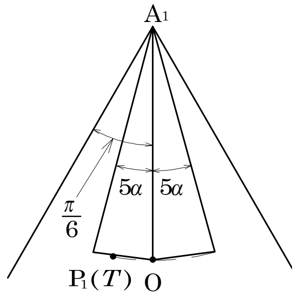
以上より，③④から，$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha \leqq \theta_1+\theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{3}+2\alpha$ ………⑤

(3)　条件より，(2)の結果を用いると，⑤と同様に，

$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha \leqq \theta_2+\theta_3 \leqq \dfrac{\pi}{3}+2\alpha$ ………⑥，$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha \leqq \theta_3+\theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{3}+2\alpha$ ………⑦

⑤⑥⑦より，$\dfrac{\pi-6\alpha}{2} \leqq \theta_1+\theta_2+\theta_3 \leqq \dfrac{\pi+6\alpha}{2}$ となり，⑥と合わせると，

$\dfrac{\pi}{6}-5\alpha \leqq \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{6}+5\alpha$



ここで，$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ に正弦定理を適用すると，

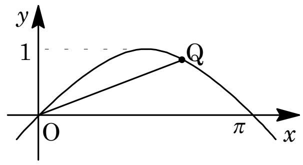
$\dfrac{1000}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\mathrm{A_1O}$，$\mathrm{A_1O}=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$

また，$\mathrm{A_1P_1}(T)=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ より，$\mathrm{P_1}(T)$ は，中心 $\mathrm{A_1}$，半径 $\mathrm{A_1O}$，中心角 $2\times5\alpha$ の扇形の弧上にあることより，

$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O}) \leqq \dfrac{1000}{\sqrt{3}}\cdot 2\sin\dfrac{5\alpha}{2}=\dfrac{2000}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{5\alpha}{2}$

さて，$0<x<\pi$ において，関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ を定義する。

すると，$f(x)$ は，右図の $y=\sin x$ のグラフにおいて線分 OQ の傾きを表すことより，単調に減少する。



$\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}>\dfrac{\sin\dfrac{5\alpha}{2}}{\dfrac{5\alpha}{2}}$，$\dfrac{5}{2}\sin\alpha>\sin\dfrac{5\alpha}{2}$

よって，$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})<\dfrac{2000}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{5}{2}\sin\alpha=\dfrac{5000}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{1000}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}<3$

以上より，$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$ が成立し，同様にすると，$d(\mathrm{P_2}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$，$d(\mathrm{P_3}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$ も成り立つ。

[解　説]

図形の総合問題ですが，前期日程とは思えないほどの質と量です。特に(3)の設問は，アバウトに評価すると結論が示せず，ずいぶん時間がかかりました。この箇所は，やや雑な書き方になっています。なお，(1)の結論式についている絶対値は，必要不可欠ではありません。