1　　解答解説のページへ

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

(3)　m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

2

解答解説のページへ

実数を成分にもつ行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 $r,\ s$ が下の条件(i), (ii), (iii)を満たすとする。

(i)　$s>1$

(ii)　$A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii)　$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$B=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を $a,\ c,\ r,\ s$ を用いて表せ。

(2)　$B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}w_n=0$ を示せ。

(3)　$c=0$ かつ $|a|<1$ を示せ。

3

解答解説のページへ

スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率$\frac{1}{4}$で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\}$$

$$D_2=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸のまわりに$180°$回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1)　$W(a)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

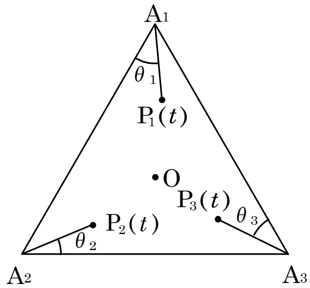
$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

6

解答解説のページへ



平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする 1 辺の長さが 1000 の正三角形$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$がある。$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$の内部に 3 点$\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{B_3}$を，$d(\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n)=1 \quad (n=1,\ 2,\ 3)$ となるようにとる。また,

$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\ \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\ \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$
$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$

とおく。$n=1,\ 2,\ 3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発をし，$\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1)　ある時刻 t で $d(\mathrm{P_1}(t),\ \mathrm{P_2}(t))\leqq 1$ が成立した。ベクトル$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と，ベクトル$\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度をθ とおく。このとき$|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2)　角度θ_1，θ_2，θ_3 を$\theta_1=\angle\mathrm{B_1A_1A_2}$，$\theta_2=\angle\mathrm{B_2A_2A_3}$，$\theta_3=\angle\mathrm{B_3A_3A_1}$ によって定義する。α を$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ$\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ を満たす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1+\theta_2$ の値のとる範囲をα を用いて表せ。

(3)　時刻t_1，t_2，t_3 のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P_2}(t_1),\ \mathrm{P_3}(t_1))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_3}(t_2),\ \mathrm{P_1}(t_2))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_1}(t_3),\ \mathrm{P_2}(t_3))\leqq 1$$

このとき，時刻$T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_2}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_3}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$$

が成立することを示せ。