**1**

問題のページへ

(1)　$(x',\ y')=(3x+y,\ -2x)$ とおくと，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことができ，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -y' \\ 2x'+3y' \end{pmatrix}$$

$l_n : a_nx+b_ny=1$ に代入すると，

$$-\frac{1}{2}a_ny'+\frac{1}{2}b_n(2x'+3y')=1,\ \ b_nx'+\left(-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n\right)y'=1$$

この方程式が $l_{n+1} : a_{n+1}x+b_{n+1}y=1$ に対応するので，

$$a_{n+1}=b_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

(2)　$a_0=3$，$b_0=2$ のもとで，①②より，

$$a_{n+1}-b_{n+1}=b_n-\left(-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n\right)=\frac{1}{2}(a_n-b_n)$$

よって，$a_n-b_n=(a_0-b_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$a_{n+1}-a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ となり，$n\geqq 1$ において，

$$a_n=a_0+\sum_{k=0}^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^k=3-\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

この式は，$n=0$ のときも成立している。

また，①より，$b_n=a_{n+1}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ となり，領域 $D_n : a_nx+b_ny>1$ は，

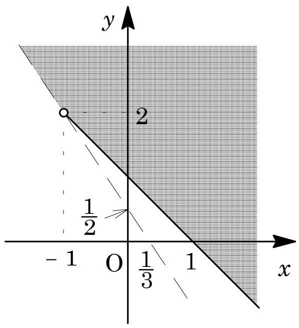
$$\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x+\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}y>1,\ \ (x+y-1)+(2x+y)\left(\frac{1}{2}\right)^n>0\cdots\cdots\cdots④$$

④から，$l_n : a_nx+b_ny=1$ は $n$ の値にかかわらず，2 直線 $x+y-1=0$ と $2x+y=0$ の交点 $(x,\ y)=(-1,\ 2)$ を通る。また，$l_n$ の傾きを $m$ とすると，

$$m=-\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=-\frac{2^n+2}{2^n+1}=-1-\frac{1}{2^n+1}$$

$n\geqq 0$ より，$0<\frac{1}{2^n+1}\leqq\frac{1}{2}$ となり，$-\frac{3}{2}\leqq m<-1$

以上より，$D_n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のすべてに含まれるような点の範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界は実線部のみ含む。



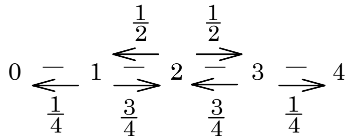

## [解 説]

よく見かける 1 次変換と数列の融合問題ですが，最後の通過領域の図示まで気が抜けません。注意力が要求されます。



© 電送数学舎 2008

**2**　　問題のページへ




(1)　操作(A)を $n$ 回繰り返した後，白が 1 枚または 3 枚の確率を $a_n$，白が 2 枚の確率を $b_n$ とおくと，

$$a_{n+1}=b_n\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b_{n+1}=\dfrac{3}{4}b_{n-1}$

ここで，条件より，$b_0=1$，$b_1=0$ なので，

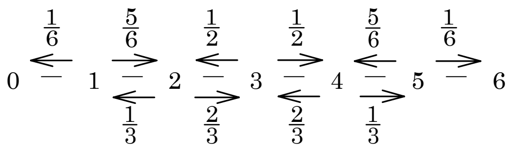
(i)　$n$ が奇数のとき，$b_n=0$

(ii)　$n$ が偶数のとき，$b_n=b_0\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

さて，操作(A)を $n$ 回繰り返した後，$n$ 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は，$n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{4}a_{n-1}=\dfrac{1}{4}b_{n-2}$ から，

(i)　$n$ が奇数のとき，$\dfrac{1}{4}b_{n-2}=0$（$n=1$ のときも成立している）

(ii)　$n$ が偶数のとき，$\dfrac{1}{4}b_{n-2}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$




(2)　操作(A)を $n$ 回繰り返した後，白が 1 枚または 5 枚の確率を $a_n$，白が 2 枚または 4 枚の確率を $b_n$，白が 3 枚の確率を $c_n$ とおくと，

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{5}{6}a_n+c_n\ \cdots\cdots\cdots②,\quad c_{n+1}=\frac{2}{3}b_n\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③を②に代入すると，$b_{n+1}=\dfrac{5}{18}b_{n-1}+\dfrac{2}{3}b_{n-1}=\dfrac{17}{18}b_{n-1}$

ここで，条件より，$b_0=0$，$b_1=1$ なので，

(i)　$n$ が偶数のとき，$b_n=0$

(ii)　$n$ が奇数のとき，$b_n=b_1\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}=\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

さて，操作(A)を $n$ 回繰り返した後，$n$ 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は，$n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{6}a_{n-1}=\dfrac{1}{18}b_{n-2}$ から，

(i)　$n$ が偶数のとき，$\dfrac{1}{18}b_{n-2}=0$

(ii)　$n$ が奇数のとき，$\dfrac{1}{18}b_{n-2}=\dfrac{1}{18}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}$　($n\geqq 3$)

なお，$n=1$ のとき，4 枚とも同じ色になる確率は，0 である。

## [解　説]

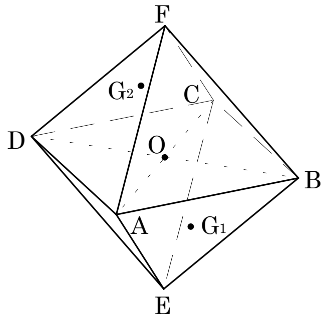
(1)は文系と共通です。(2)も(1)と同じ方法で解いています。



© 電送数学舎 2008

**3**

問題のページへ




(1)　1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF において，正方形 ABCD の対角線の交点を O とすると，

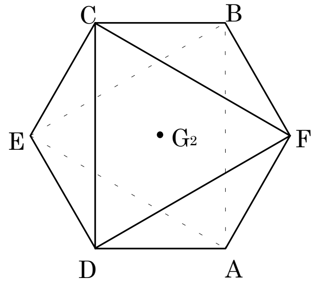
$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\triangle\mathrm{ACE}$ は $\angle\mathrm{AEC}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるので，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OE}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，四面体 OABE において，底面の正三角形 ABE の重心を $\mathrm{G_1}$ とおくと，①②より，線分 $\mathrm{OG_1}$ は平面 ABE に垂直である。

同様に，正三角形 CDF の重心を $\mathrm{G_2}$ とおくと，線分 $\mathrm{OG_2}$ は平面 CDF に垂直である。さらに，平面 ABE と平面 CDF は平行であることより，3 点 $\mathrm{G_1}$，O，$\mathrm{G_2}$ は一直線上にある。




これより，$\triangle\mathrm{ABE}$ の面を水平な台に置き，真上から見ると，正三角形 ABE を $\mathrm{G_2}(\mathrm{G_1})$ のまわりに $180^\circ$ だけ回転すると正三角形 CDF の位置になっている。

したがって，正八面体を真上から見た図は，正六角形 AFBCED を外形とする右図である。

(2)　直線 $\mathrm{G_1G_2}$ を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体を $R$ とすると，その外形は，辺 AF を $\mathrm{G_1G_2}$ のまわりに回転したものに等しい。

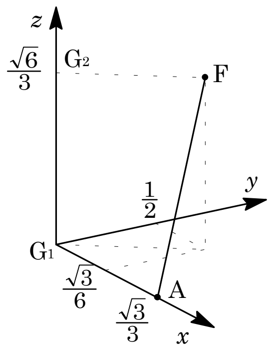
さて，辺 BE の中点を M とおき，$\triangle\mathrm{OAM}$ において，

$$\mathrm{AG_1}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{G_1G_2}=2\mathrm{OG_1}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AG_1}^2}=2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここで，$\mathrm{G_1}$ を原点とし，平面 ABE を $xy$ 平面とする座標系を設定する。さらに，$\mathrm{G_1A}$ を $x$ 軸，$\mathrm{G_1G_2}$ を $z$ 軸とすると，

$$\mathrm{G_1}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{G_2}\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$$




また，点 F の $x$ 座標と $y$ 座標は，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}$$

よって，$\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{1}{6}(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$$



© 電送数学舎 2008

これより，直線 AF のパラメータ表示は,

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)+t(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})\cdots\cdots\cdots③$$

直線③と平面 $z=k\left(0\leqq k\leqq\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$との交点は，$2\sqrt{6}t=k$ より $t=\frac{\sqrt{6}}{12}k$ となり，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k,\quad y=3\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{6}}{4}k$$

よって，立体 $R$ を平面 $z=k$ で切断したときの切り口の面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k)=\pi(x^2+y^2)=\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}k\right)^2\right\}=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)$$

これより，立体 $R$ の体積 $V$ は,

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}S(k)\,dk=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)dk$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}k-\frac{\sqrt{6}}{12}k^2+\frac{1}{6}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{6}}{18}+\frac{\sqrt{6}}{27}\right)=\frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$$

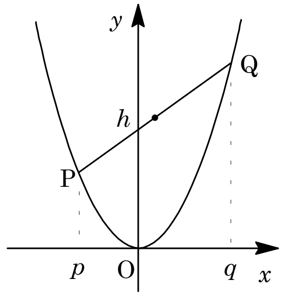
## [解 説]

ありふれた素材をもとにしたものですが，内容は本格的な求積問題です。東大らしい構図です。


© 電送数学舎 2008

**4**

問題のページへ




(1)　$\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$とおくと, 線分 PQ の中点の $y$ 座標 $h$ は,

$$h=\frac{1}{2}(p^2+q^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, 線分 PQ の傾き $m$ は,

$$m=\frac{p^2-q^2}{p-q}=p+q\cdots\cdots\cdots②$$

また, 線分 PQ の長さ $L$ は,

$$L^2=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2=(p-q)^2\{1+(p+q)^2\}\cdots\cdots\cdots③$$

②を③に代入して, $L^2=(p-q)^2(1+m^2)$から, $(p-q)^2=\dfrac{L^2}{1+m^2}$

②より, $(p+q)^2=m^2$となり, ①に代入すると,

$$h=\frac{1}{2}(p^2+q^2)=\frac{1}{4}\{(p+q)^2+(p-q)^2\}=\frac{1}{4}\left(m^2+\frac{L^2}{1+m^2}\right)$$

(2)　$m^2=u\geqq 0$とおくと, $h=\dfrac{1}{4}\left(u+\dfrac{L^2}{1+u}\right)$となり,

$$\frac{dh}{du}=\frac{1}{4}\left\{1-\frac{L^2}{(1+u)^2}\right\}=\frac{(u+1+L)(u+1-L)}{4(1+u)^2}$$

(i)　$L\geqq 1$のとき

$h$ の増減は右表のようになり, $u=L-1$のとき, $h$ は最小値$\dfrac{1}{4}(2L-1)$をとる。

| $u$ | 0 | $\cdots$ | $L-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{dh}{du}$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $h$ | $\dfrac{1}{4}L^2$ | $\searrow$ | $\dfrac{1}{4}(2L-1)$ | $\nearrow$ |

(ii)　$0<L<1$のとき

$\dfrac{dh}{du}>0$より, $h$ は単調増加し, $u=0$のとき, $h$ は最小値$\dfrac{1}{4}L^2$をとる。

## [解 説]

微分法の標準的な問題です。なお, (2)において, 相加平均と相乗平均の関係を用いると, (i)の場合の結論が導けます。



© 電送数学舎 2008

**5**

問題のページへ

(1)　$\boxed{3^m}=\dfrac{10^{3^m}-1}{9}$ は，$3^m$ で割り切れるが，$3^{m+1}$ では割り切れないことを示す。

(i)　$m=0$ のとき

$\boxed{3^0}=\dfrac{10^{3^0}-1}{9}=\dfrac{10-1}{9}=1$ は，$3^0=1$ で割り切れるが，$3^1=3$ では割り切れない。

(ii)　$m=k$ のとき

$\boxed{3^k}=\dfrac{10^{3^k}-1}{9}$ は，$3^k$ で割り切れるが，$3^{k+1}$ では割り切れないと仮定すると，

$$\boxed{3^{k+1}}=\frac{10^{3^{k+1}}-1}{9}=\frac{10^{3^k\cdot 3}-1}{9}=\frac{(10^{3^k})^3-1}{9}=\frac{(10^{3^k}-1)\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\}}{9}$$
$$=\boxed{3^k}\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\}$$

ここで，$a=(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1=100^{3^k}+10^{3^k}+1=(100^{3^k}-1)+(10^{3^k}-1)+3$ とおくと，$100^{3^k}-1$，$10^{3^k}-1$ はともに 9 の倍数であり，これより $a$ は 3 の倍数ではあるが，$3^2$ の倍数ではない。

したがって，$\boxed{3^{k+1}}$ は $3^{k+1}$ で割り切れるが，$3^{k+2}$ では割り切れない。

(i)(ii)より，$\boxed{3^m}$ は $3^m$ で割り切れるが，$3^{m+1}$ では割り切れない。

(2)　$n$ が 27 で割り切れるとき，$n=27l$　$(l=1,\ 2,\ \cdots)$ と表せ，

$$\boxed{n}=\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^{27l}-1}{9}=\frac{10^{27}-1}{9}\{(10^{27})^{l-1}+(10^{27})^{l-2}+\cdots+10^{27}+1\}$$
$$=\boxed{27}\{(10^{27})^{l-1}+(10^{27})^{l-2}+\cdots+10^{27}+1\}$$

$27=3^3$ なので, (1)より，$\boxed{27}$ は 27 で割り切れ，$\boxed{n}$ も 27 で割り切れる。

逆に，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるとき，$\boxed{n}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ が 9 で割り切れるすなわち各位の数の和 $n$ が 9 の倍数となることが必要より，$n=9k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと，

$$\boxed{n}=\frac{10^{9k}-1}{9}=\frac{10^9-1}{9}\{(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1\}$$
$$=\boxed{9}\{(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1\}$$

$9=3^2$ なので, (1)より，$\boxed{9}$ は 9 で割り切れるが, 27 では割り切れない。

すると，$b=(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1$ とおくと，$b$ が 3 で割り切れなくてはいけない。一方，$b$ を十進法で表したとき，各位の数は 1 と 0 のみであり，また 1 の個数は $k$ より，各位の数の和は $k$ となる。

よって, $k$ は 3 の倍数となり，$n=9k$ から $n$ は 27 で割り切れる。

## [解 説]

3 の倍数や 9 の倍数は，各位の数の和が 3 の倍数や 9 の倍数かどうかで判断できますが，この点を利用する問題です。



© 電送数学舎 2008

$\boxed{6}$

問題のページへ

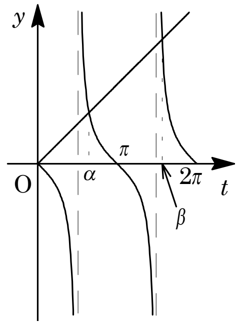
$0 \leqq t \leqq 2\pi$ における曲線 $x=\cos 2t$，$y=t\sin t$ に対して，

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t\,,\quad \frac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t$$

ここで，$\dfrac{dx}{dt}=0$ の解は，$t=0$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$2\pi$ である。

また，$\cos t \neq 0$ $\left(t \neq \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$のとき，

$$\frac{dy}{dt}=\cos t(\tan t+t)=\cos t\{t-(-\tan t)\}$$




そこで，$y=t$，$y=-\tan t$ のグラフを描くと右図のようになり，原点以外の 2 つの交点を $t=\alpha$，$\beta$ $(\alpha<\beta)$ とおく。

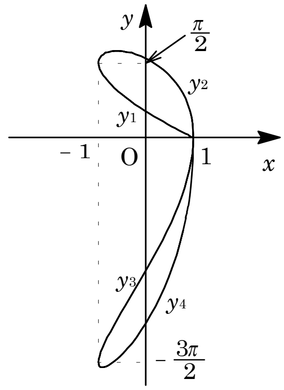
なお，$\cos t=0$ のときは，

$$\frac{dy}{dt}=\sin\frac{\pi}{2}=1\ \left(t=\frac{\pi}{2}\right),\quad \frac{dy}{dt}=\sin\frac{3\pi}{2}=-1\ \left(t=\frac{3}{2}\pi\right)$$

以上をまとめて，$x$, $y$ の増減を調べると，下表のようになる。

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dx}{dt}$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ |
| $x$ | $1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | | ↗ | $1$ |
| $\frac{dy}{dt}$ | $0$ | $+$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $0$ | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ | ↗ | | ↘ | $0$ | ↘ | $-\frac{3\pi}{2}$ | ↘ | | ↗ | $0$ |

これより，曲線を描くと，その概形は右図のとおりである。




曲線の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$，$\pi \leqq t \leqq \dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2} \leqq t \leqq 2\pi$ の部分を，それぞれ $y=y_1$，$y=y_2$，$y=y_3$，$y=y_4$ とおくと，曲線によって囲まれる領域の面積 $S$ は，

$$S=\int_{-1}^{1} y_2\,dx-\int_{-1}^{1} y_1\,dx+\int_{-1}^{1} y_3\,dx-\int_{-1}^{1} y_4\,dx$$

ここで，変数を $x$ から $t$ に置き換えると，

$$\int_{-1}^{1} y_2\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} y_1\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} y_3\,dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} y_4\,dx=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$



© 電送数学舎 2008

すると，$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$

$$+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

$$=\int_{0}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt-\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

ここで，$F(t)=\int t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$ とおくと，

$$F(t)=\int t(\cos 3t-\cos t)\,dt=t\left(\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right)-\int\left(\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right)dt$$

$$=t\left(\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right)+\frac{1}{9}\cos 3t-\cos t+C$$

以上より，$S=F(\pi)-F(0)-F(2\pi)+F(\pi)=2F(\pi)-F(0)-F(2\pi)$

$$=2\cdot\frac{8}{9}-\left(-\frac{8}{9}\right)-\left(-\frac{8}{9}\right)=\frac{32}{9}$$

## [解 説]

パラメータ曲線に囲まれた領域の面積を求めるものですが，計算量は多めです。なお，曲線の概形を描くにあたっては，上の解に，$0<t_1<\frac{\pi}{2}$として，$x$ 座標の等しくなる $t=t_1$，$t=\pi-t_1$，$t=\pi+t_1$，$t=2\pi-t_1$ における $y$ 座標の大小関係の調査を加えると，明快になります。



© 電送数学舎 2008