

1

問題のページへ

まず, $(1+x)^k$ を二項展開すると,

$$(1+x)^k = {}_k C_0 + {}_k C_1 x + {}_k C_2 x^2 + \cdots + {}_k C_k x^k = 1 + {}_k C_1 x + {}_k C_2 x^2 + \cdots + x^k$$

また, $m \leq n$ として, 整式 $P(x)$ の次数を m とおき,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_m x^m$$

これより, $(1+x)^k P(x)$ は, $m+k$ 次の整式となり,

$$(1+x)^k P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_{m+k} x^{m+k}$$

係数を比べると,

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + a_0 {}_k C_1, \quad b_2 = a_2 + a_1 {}_k C_1 + a_0 {}_k C_2, \quad \dots, \dots,$$

$$b_n = a_n + a_{n-1} {}_k C_1 + a_{n-2} {}_k C_2 + \cdots + a_0 {}_k C_n \dots \dots \dots (*)$$

ただし, $k < i$ のとき ${}_k C_i = 0$ とする。

ここで, $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ がすべて整数であるとき, (*)より,

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 - a_0 {}_k C_1, \quad a_2 = b_2 - a_1 {}_k C_1 - a_0 {}_k C_2, \quad \dots, \dots,$$

$$a_n = b_n - a_{n-1} {}_k C_1 - a_{n-2} {}_k C_2 - \cdots - a_0 {}_k C_n$$

これより, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ はすべて整数となる。

よって, $P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数である。

[解 説]

上の解では簡単に記していますが, 証明の構図は「 a_0 が整数 a_1 が整数 a_2 が整数 $\dots a_n$ が整数」です。

2

問題のページへ

1 k n を満たす k に対し, $P_{k-1}OP_k$ はすべて相似となり,
 $P_{k-1}P_k = a_k$ とおくと,

$$a_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_k$$

これより, $a_k = a_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1}$ となり,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} = a_1 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}{1 + \frac{1}{n} - 1} \\ &= a_1 n \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \end{aligned}$$

ここで, OP_0P_1 に余弦定理を適用すると,

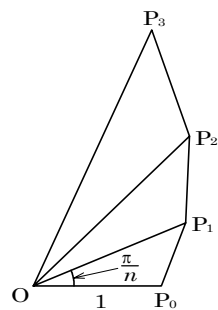
$$a_1^2 = 1^2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} = 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

よって, $a_1 = \sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n^2}}$ から,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) + 1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin^2 \frac{\pi}{2n} + 1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\pi^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right)^2 + 1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \right\} \\ &= \sqrt{\pi^2 + 1} (e - 1) \end{aligned}$$

[解 説]

図形と数列の極限の融合問題です。基本事項の確認が主となっており, 落とすことはできません。



3

問題のページへ

- (1) $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ とおき、線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R の動く範囲 D に点 (a, b) が属することより、

$$a = \frac{2p+q}{3} \dots\dots\dots, \quad b = \frac{2p^2+q^2}{3} \dots\dots\dots$$

より、 $q = 3a - 2p \dots\dots\dots$ となり、に代入すると、
よって、 $2p^2 + (3a - 2p)^2 = 3b$

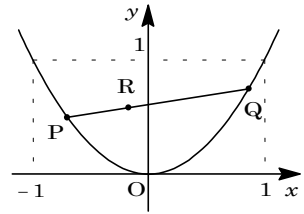
$$b = 2p^2 - 4ap + 3a^2 = 2(p-a)^2 + a^2$$

そこで、 $f(p) = 2(p-a)^2 + a^2$ とおき、 $-1 \leq p \leq 1 \dots\dots\dots$, $-1 \leq q \leq 1 \dots\dots\dots$ のもとで、 $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

から、 $-1 \leq 3a - 2p \leq 1$ となり、

$$\frac{3a-1}{2} \leq p \leq \frac{3a+1}{2} \dots\dots\dots$$

さて、これを ap 平面上に図示すると、右図の網点部になる。



ここで、 $-1 \leq a \leq 1$ から、 $f(p)$ は最小値 $f(a) = a^2$ をとり、また最大値の候補としては、

$$f(-1) = 3a^2 + 4a + 2, \quad f(1) = 3a^2 - 4a + 2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right) = \frac{3}{2}a^2 - a + \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{3a+1}{2}\right) = \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{2}$$

これより、 a の値で場合分けをして、 $f(p)$ のとり得る値の範囲を求めると、

- (i) $-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}$ のとき

$$f(a) \leq f(p) \leq f(-1) \text{ より, } a^2 \leq b \leq 3a^2 + 4a + 2$$

- (ii) $-\frac{1}{3} \leq a \leq 0$ のとき

$$f(a) \leq f(p) \leq f\left(\frac{3a-1}{2}\right) \text{ より, } a^2 \leq b \leq \frac{3}{2}a^2 - a + \frac{1}{2}$$

- (iii) $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$ のとき

$$f(a) \leq f(p) \leq f\left(\frac{3a+1}{2}\right) \text{ より, } a^2 \leq b \leq \frac{3}{2}a^2 + a + \frac{1}{2}$$

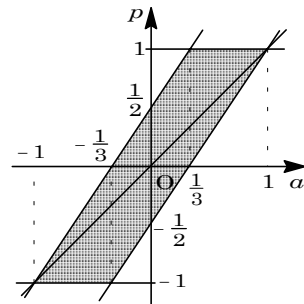
- (iv) $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$ のとき

$$f(a) \leq f(p) \leq f(1) \text{ より, } a^2 \leq b \leq 3a^2 - 4a + 2$$

- (2) $a < -1$, $1 < a$ のときは、右上図より、を満たす p は存在しない。

よって、(1) から、 D を表す不等式は、

$$x^2 \leq y \leq 3x^2 + 4x + 2 \quad \left(-1 \leq x \leq -\frac{1}{3}\right)$$

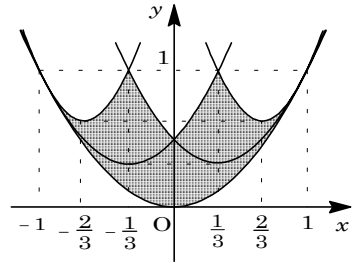


$$x^2 \quad y \quad \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad \left(-\frac{1}{3} \quad x \quad 0 \right)$$

$$x^2 \quad y \quad \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \quad \left(0 \quad x \quad \frac{1}{3} \right)$$

$$x^2 \quad y \quad 3x^2 - 4x + 2 \quad \left(\frac{1}{3} \quad x \quad 1 \right)$$

以上より, D は右図の網点部ようになる。ただし, 境界は領域に含む。



[解 説]

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお, (1)では, いったん考え方を整理するために, ap 平面上で方針を確認しています。

4

問題のページへ

(1) $A = aP + (a+1)Q \dots\dots$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = O$, $QP = O$ より,
 $(P+Q)A = (P+Q)(aP + (a+1)Q) = aP^2 + (a+1)PQ + aQP + (a+1)Q^2$
 $= aP + (a+1)Q = A$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ のとき, $\det A = a(a+1) > 0$ より A^{-1} は存在する。

(1)より, $(P+Q)A = A$ の両辺に右から A^{-1} をかけると, E を単位行列として,
 $(P+Q)AA^{-1} = AA^{-1}$, $P+Q = E \dots\dots\dots$

から $Q = E - P$ となり, に代入すると

$$A = aP + (a+1)(E - P), \quad A = -P + (a+1)E$$

よって, $P = (a+1)E - A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q = E - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = O$, $QP = O$ は満たされている。

(3) (2)より, $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix} = kP + (k+1)Q$ と表せるので,

$$\begin{aligned} A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2 &= (nP + (n+1)Q)((n-1)P + nQ) \cdots (2P + 3Q) \\ &= n(n-1) \cdots 2P + (n+1)n \cdots 3Q = n!P + \frac{(n+1)!}{2}Q \\ &= n! \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(n+1)!}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{n!}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ n-1 & n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[解 説]

類題演習の経験のありそうな行列の演算に関する頻出問題です。

5

問題のページへ

- (1) n 回硬貨を投げたとき、最後にブロックの高さが m となるのは、最初 $n - m - 1$ 回は任意、次の 1 回が裏で、その後 m 回続けて表が出る場合より、その確率 p_m は、

$$p_m = (1-p)p^m \quad (0 \leq m < n)$$

ただし、 $m = n$ のとき、 $p_m = p^m$ である。

- (2) 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m は、(1)より、

- (i) $0 \leq m < n$ のとき

$$q_m = \sum_{k=0}^m (1-p)p^k = (1-p) \cdot \frac{1-p^{m+1}}{1-p} = 1 - p^{m+1}$$

- (ii) $m = n$ のとき

$$q_m = \sum_{k=0}^{m-1} (1-p)p^k + p^m = (1-p) \cdot \frac{1-p^m}{1-p} + p^m = 1$$

- (3) 2 度のゲームにおいて、高い方のブロックの高さが m であるのは、1 度目 m で 2 度目 $m-1$ 以下、または 1 度目 $m-1$ 以下で 2 度目 m 、または 1 度目 2 度目とも m のいずれかである。その確率 r_m は、(1)(2)より、

- (i) $0 \leq m < n$ のとき

$$\begin{aligned} r_m &= p_m q_{m-1} + q_{m-1} p_m + p_m^2 = p_m (2q_{m-1} + p_m) \\ &= (1-p)p^m (2 - 2p^m + p^m - p^{m+1}) = (1-p)p^m (2 - p^m - p^{m+1}) \end{aligned}$$

- (ii) $m = n$ のとき

$$r_m = p_m q_{m-1} + q_{m-1} p_m + p_m^2 = 2p^m (1 - p^m) + p^{2m} = 2p^m - p^{2m}$$

[解 説]

裏ができれば、過去を清算できるタイプのゲームです。ただ、 $m = n$ の場合を特別に考えなくてはならない点が要注意です。

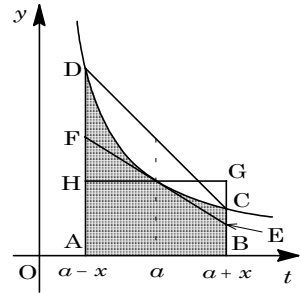
6

問題のページへ

- (1) $y = \frac{1}{t}$ に対して, $y' = -\frac{1}{t^2}$, $y'' = \frac{2}{t^3}$ となり, $t > 0$ において, 曲線 $y = \frac{1}{t}$ は下に凸で単調に減少する。

このため, 曲線上の点における接線は曲線の下側にあり, 曲線上の 2 点を結ぶ線分は曲線の上側にある。

ここで, $0 < x < a$ より, $0 < a - x < a < a + x$ において, 右図から,



$$\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt > (\text{台形 FABE}) = (\text{長方形 HABG})$$

$$\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt > \frac{1}{a} \cdot 2x = \frac{2x}{a} \dots\dots\dots$$

また, $\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < (\text{台形 ABCD})$ より,

$$\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \cdot 2x = x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } \frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) \dots\dots\dots$$

- (2) まず, $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \int_1^{\frac{5}{4}} \frac{1}{t} dt + \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{1}{t} dt \dots\dots\dots$

$$\text{において, } a = \frac{5}{4}, x = \frac{1}{4} \text{ とすると, } \frac{2}{5} < \int_1^{\frac{5}{4}} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{5}{12} \dots\dots\dots$$

$$\text{また, } a = \frac{7}{4}, x = \frac{1}{4} \text{ とすると, } \frac{2}{7} < \int_{\frac{5}{4}}^2 \frac{1}{t} dt < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{7}{24} \dots\dots\dots$$

より,

$$\frac{24}{35} = \frac{2}{5} + \frac{2}{7} < \log 2 < \frac{5}{12} + \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

さらに, $\frac{24}{35} > 0.685 > 0.68$, $\frac{17}{24} < 0.709 < 0.71$ に注意すると,

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

[解 説]

(2)では, まず $\frac{a+x}{a-x} = 2$ すなわち $a = 3x$ として計算しましたが, $\frac{2}{3} < \log 2 < \frac{3}{4}$ しか示せず, 「やはり」という感じがしました。そこで, 考え直したのが上の解です。