1

問題のページへ

(1)　まず，P_1，P_2 が曲線 $xy=1$ 上にあることより，t, s を実数として，$\overrightarrow{OP_1}=\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$，$\overrightarrow{OP_2}=\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$とおくことができるので，条件より，

$$\overrightarrow{OP_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\frac{3}{2}\left(s,\ \frac{1}{s}\right)-\left(t,\ \frac{1}{t}\right)=\left(\frac{3}{2}s-t,\ \frac{3}{2s}-\frac{1}{t}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{OP_3}=(x,\ y)$とおくと，

$$xy=\left(\frac{3}{2}s-t\right)\left(\frac{3}{2s}-\frac{1}{t}\right)=\frac{9}{4}-\frac{3s}{2t}-\frac{3t}{2s}+1=\frac{13}{4}-\left(\frac{3s}{2t}+\frac{3t}{2s}\right)$$

さて，$xy=1$ とおくと，$\dfrac{13}{4}-\left(\dfrac{3s}{2t}+\dfrac{3t}{2s}\right)=1$，$\dfrac{s}{t}+\dfrac{t}{s}=\dfrac{3}{2}$

$$2s^2+2t^2-3st=0,\ \frac{3}{2}(s-t)^2+\frac{1}{2}(s^2+t^2)=0\cdots\cdots\cdots②$$

$s\neq 0$，$t\neq 0$ より，②を満たす s，t は存在しなので，P_3 は曲線 $xy=1$ 上にはない。

(2)　P_1，P_2 が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるので，α，β を実数として，

$$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \overrightarrow{OP_2}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

すると，$\overrightarrow{OP_3}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\left(\dfrac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha,\ \dfrac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)$

P_3 も円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるので，$\left(\dfrac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)^2=1$

$$\frac{9}{4}-3\cos\beta\cos\alpha-3\sin\beta\sin\alpha+1=1,\ \cos(\beta-\alpha)=\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$\overrightarrow{OP_4}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_2}$ なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_4}&=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha,\ \frac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)-(\cos\beta,\ \sin\beta)\\&=\left(\frac{5}{4}\cos\beta-\frac{3}{2}\cos\alpha,\ \frac{5}{4}\sin\beta-\frac{3}{2}\sin\alpha\right)\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{OP_4}=(x,\ y)$とおくと，③より，

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=\left(\frac{5}{4}\cos\beta-\frac{3}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{5}{4}\sin\beta-\frac{3}{2}\sin\alpha\right)^2\\&=\frac{25}{16}+\frac{9}{4}-\frac{15}{4}(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)=\frac{61}{16}-\frac{15}{4}\cos(\beta-\alpha)\\&=\frac{61}{16}-\frac{15}{4}\times\frac{3}{4}=1\end{aligned}$$

よって，P_4 も円周 $x^2+y^2=1$ 上にある。

[解 説]

(1), (2)とも，曲線を媒介変数表示し，題意に沿って立式しました。実戦的には，この方法が一番です。

2

問題のページへ

(1)　×が 3 個出る前に○が 2 個出る場合は，×○○，××○○，×○×○のいずれかなので，その確率 P_2 は，

$$P_2 = (1-p)\,p + p(1-p)\,p + (1-p)^3 = (1-p)(\,p + p^2 + 1 - 2p + p^2)$$
$$= (1-p)(1-p+2p^2)$$

(2)　×が 3 個出る前に○が n 個出る場合は，

(i)　最初の×の後，○が続けて n 個出るとき
このときの確率は，$(1-p)\,p^{n-1}$ である。

(ii)　最初×が 2 個出た後，○が続けて n 個出るとき
このときの確率は，$p(1-p)\,p^{n-1} = (1-p)\,p^n$ である。

(iii)　最初の×の後，○が続けて k 個，次に×さらに○が続けて $n-k$ 個出るとき
このときの確率は，$1 \leqq k \leqq n-1$ として，

$$(1-p)\,p^{k-1}(1-p)^2\,p^{n-k-1} = (1-p)^3\,p^{n-2}$$

(i)～(iii)より，×が 3 個出る前に○が n 個出る確率 P_n は，

$$P_n = (1-p)\,p^{n-1} + (1-p)\,p^n + \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^3\,p^{n-2}$$
$$= (1-p)\,p^{n-1}(1+p) + (n-1)(1-p)^3\,p^{n-2}$$
$$= (1-p)\,p^{n-2}\{\,p(1+p) + (n-1)(1-p)^2\,\}$$
$$= (1-p)\,p^{n-2}\{\,np^2 - (2n-3)\,p + n - 1\,\}$$

[解 説]

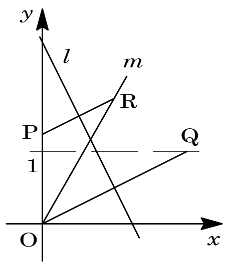
(1)で具体例を練習し，(2)で一般化する問題です。注意深く考えていけば，完答できます。文系と共通問題です。

3

問題のページへ

(1)　$\mathrm{R}(r,\ r\tan\theta)$とおくと, PR と l が垂直より，$\dfrac{r\tan\theta-p}{r}\cdot\alpha=-1$ となり，

$$r(\alpha\tan\theta+1)=p\alpha\ ,\ \ r=\frac{p\alpha}{\alpha\tan\theta+1}\ \cdots\cdots\cdots①$$



また，$\mathrm{Q}(q,\ 1)$とおくと, OQ と l が垂直より，

$$\frac{1}{q}\cdot\alpha=-1\ ,\ \ q=-\alpha\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，PR の中点$\left(\dfrac{r}{2},\ \dfrac{r\tan\theta+p}{2}\right)$と OQ の中点$\left(\dfrac{q}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$を結ぶ直線が l となり，その傾きが α から，

$$\frac{r\tan+p}{2}-\frac{1}{2}=\alpha\left(\frac{r}{2}-\frac{q}{2}\right),\ \ r(\tan\theta-\alpha)=-\alpha q-p+1$$

①②を代入して，$\dfrac{p\alpha}{\alpha\tan\theta+1}(\tan\theta-\alpha)=\alpha^2-p+1$

$$p\alpha\tan\theta-p\alpha^2=\alpha(\alpha^2-p+1)\tan\theta+(\alpha^2-p+1)$$

よって，$-\alpha(\alpha^2-2p+1)\tan\theta=p\alpha^2+\alpha^2-p+1$ から，

$$\tan\theta=\frac{p\alpha^2+\alpha^2-p+1}{-\alpha(\alpha^2-2p+1)}\ \cdots\cdots\cdots③$$

(2)　直線 OQ の方程式が，$y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ より，$1=q\tan\dfrac{\theta}{3}$

②より，$1=-\alpha\tan\dfrac{\theta}{3}$，$\tan\dfrac{\theta}{3}=-\dfrac{1}{\alpha}$

すると，$\tan\dfrac{2}{3}\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{3}}=\dfrac{-\dfrac{2}{\alpha}}{1-\dfrac{1}{\alpha^2}}=\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2-1}$ から，

$$\tan\theta=\frac{\tan\dfrac{\theta}{3}+\tan\dfrac{2\theta}{3}}{1-\tan\dfrac{\theta}{3}\tan\dfrac{2\theta}{3}}=\frac{-\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2-1}}{1-\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)\cdot\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2-1}}=\frac{-3\alpha^2+1}{\alpha^3-3\alpha}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{p\alpha^2+\alpha^2-p+1}{-\alpha(\alpha^2-2p+1)}=\dfrac{-3\alpha^2+1}{\alpha^3-3\alpha}$

$$(\alpha^2-3)(p\alpha^2+\alpha^2-p+1)=(3\alpha^2-1)(\alpha^2-2p+1)$$

まとめて，$(p-2)\alpha^4+2(p-2)\alpha^2+(p-2)=0$，$(p-2)(\alpha^4+2\alpha^2+1)=0$

よって，$p=2$ のとき，どのような α に対しても成立するので，条件を満たす点 P は存在する。

[解 説]

(1)はいろいろな解法が考えられますが，いずれを採用しても，計算量はかなり多めです。

4

問題のページへ

(1)　$x^2+y^2+z^2=xyz$ $(1\leqq x\leqq y\leqq z)$ ……①において, $y\leqq 3$ より，$y=1,\ 2,\ 3$

(i)　$y=1$ のとき　$x=1$ より，$1+1+z^2=z$，$z^2-z+2=0$

$D=1-8=-7<0$ より解なし。

(ii)　$y=2$ のとき　$x^2+4+z^2=2xz$，$z^2-2xz+x^2+4=0$

$x=1,\ 2$ のいずれの場合も，$D/4=x^2-(x^2+4)=-4<0$ より解なし。

(iii)　$y=3$ のとき　$x^2+9+z^2=3xz$，$z^2-3xz+x^2+9=0$

このとき, $1\leqq x\leqq 3$ かつ $D=9x^2-4(x^2+9)=5x^2-36\geqq 0$ から，$x=3$ となり,

$$z^2-9z+18=0,\ (z-3)(z-6)=0,\ z=3,\ 6$$

(i)～(iii)より，$(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3)$，$(3,\ 3,\ 6)$

(2)　$(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が①を満たすので,

$$a^2+b^2+c^2=abc\quad(1\leqq a\leqq b\leqq c)\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$z=-a+bc$ とすると, z は整数で,

$$b^2+c^2+z^2-bcz=b^2+c^2+(-a+bc)^2-bc(-a+bc)$$
$$=a^2+b^2+c^2-abc=0$$

(1)より, $b\geqq 3$ であり,

$$z-c=-a+bc-c=c(b-1)-a\geqq 2c-a=c+(c-a)>0$$

よって，$b^2+c^2+z^2=bcz$ $(1\leqq b\leqq c\leqq z)$ となる整数 z が存在する。

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を，次の漸化式で定義する。

$$a_1=3,\ b_1=3,\ c_1=3$$
$$a_{n+1}=b_n,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=-a_n+b_nc_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

すると, (2)より，すべての自然数 n に対して,

$$a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2=a_nb_nc_n\quad(1\leqq a_n\leqq b_n\leqq c_n)$$

さらに，$c_{n+1}-c_n=-a_n+b_nc_n-c_n\geqq 2c_n-a_n>0$ から，すべての $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ は異なるので, ①を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在する。

[解 説]

(1)と(2)の誘導によって，(3)の証明がスムーズに行えます。なお，(1)については，最初，すべての場合をチェックしましたが，解なしのケースがほとんどなので，作り直した解です。また，(2)では，z を $z=-a+bc$ として設定していますが，これは②と $b^2+c^2+z^2=bcz$ の両辺の差をとって見つけています。

5

問題のページへ

(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ より，帰納的に $a_n>0$ である。

さて，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(1+a_n)^2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+2+a_n$ ……(＊)から，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+2+\frac{1}{b_n}$$

以下，数学的帰納法を用いて，$n>1$ のとき $b_n>2n$ となることを示す。

(i)　$n=2$ のとき

$b_2=b_1+2+\dfrac{1}{b_1}=2+2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}>2\times 2$ となり，$n=2$ のとき成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

$b_k>2k$ と仮定すると，$b_{k+1}=b_k+2+\dfrac{1}{b_k}>b_k+2>2(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n>1$ のとき $b_n>2n$ である。

(2)　(1)より，$n\geqq 2$ において $b_n=\dfrac{1}{a_n}>2n$ より，$a_n<\dfrac{1}{2n}$ となるので，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

よって，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\dfrac{1}{2}\left(1+\left[\,\log x\,\right]_1^n\right)=\dfrac{1}{2}(1+\log n)$ となり，

$$0<\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$

(3)　(＊)より，$a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}-2$ なので，

$$\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}-2\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}-2n=\frac{1}{a_{n+1}}-2n-2$$

よって，$\displaystyle\frac{1}{a_{n+1}}=\sum_{k=1}^n a_k+2n+2$ より，$\displaystyle\frac{1}{na_{n+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k+2+\frac{2}{n}$

すると，(2)より，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k+2+\frac{2}{n}\to 2$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\frac{1}{2}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot na_{n+1}=\frac{1}{2}$

[解 説]

適切な誘導のついている数列と微積分の総合問題で，演習すべき 1 題です。

6

問題のページへ

(1) $x>0$ のとき，$f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{12(3e^{3x}-3e^{x})(e^{2x}-1)-12(e^{3x}-3e^{x})(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{12(e^{5x}+3e^{x})}{(e^{2x}-1)^2}$$

すると，$f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}=-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{x}-3e^{-x})}{1-e^{-2x}}=\infty$$

以上より, $x>0$ において，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる x がただ 1 つ存在する。

(2) まず，$x=f(t)$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ となる。

また，$f(t)=8$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^{t})}{e^{2t}-1}=8$ となり，

$$3e^{3t}-2e^{2t}-9e^{t}+2=0,\ (e^{t}-2)(3e^{2t}+4e^{t}-1)=0$$

ここで, $t>0$ より $e^{t}>1$ となり，$e^{t}=2$，$t=\log 2$ である。

同様に，$f(t)=27$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^{t})}{e^{2t}-1}=27$ となり，

$$4e^{3t}-9e^{2t}-12e^{t}+9=0,\ (e^{t}-3)(4e^{2t}+3e^{t}-3)=0$$

$e^{t}>1$ から，$e^{t}=3$，$t=\log 3$ である。

よって，$\displaystyle\int_8^{27}g(x)\,dx=\int_{\log 2}^{\log 3}g(f(t))f'(t)\,dt=\int_{\log 2}^{\log 3}t\,f'(t)\,dt$

$$=\left[\,t\,f(t)\,\right]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3}f(t)\,dt$$

$$=\log 3\cdot f(\log 3)-\log 2\cdot f(\log 2)-\int_{\log 2}^{\log 3}f(t)\,dt$$

$$=27\log 3-8\log 2-12\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{t}(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}dt$$

さて，$u=e^{t}$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=e^{t}$ であり，$t=\log 2$ のとき $u=2$，$t=\log 3$ のとき $u=3$ となることより，

$$\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{t}(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}dt=\int_2^3\frac{u^2-3}{u^2-1}du=\int_2^3\left(1-\frac{2}{u^2-1}\right)du$$

$$=\int_2^3\left(1-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\right)du=\left[u+\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_2^3$$

$$=1+\log 2-\log 3$$

以上より，$\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx = 27\log 3 - 8\log 2 - 12(1+\log 2-\log 3)$

$$= -12 - 20\log 2 + 39\log 3$$

[解 説]

逆関数の定積分を題材とした重要問題です。過去にも，たとえば 1998 年に東北大で類題が出ています。