1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ に対し，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$が存在し，$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，$a_1=1$，$b_1=-1$ である。

(ii)　$n=k$ のとき

ある a_k，b_k に対して，$f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ と仮定する。

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{b_kx^{-1}x^{k+1}-(a_k+b_k\log x)(k+1)x^k}{x^{2(k+1)}}$$

$$=\frac{b_k-(k+1)(a_k+b_k\log x)}{x^{k+2}}=\frac{\{-(k+1)a_k+b_k\}-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}$$

ここで，$a_{k+1}=-(k+1)a_k+b_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とおくと，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表される。

したがって，a_n，b_n に関する漸化式は，$a_1=1$，$b_1=-1$ で，

$a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n$ ………①，$b_{n+1}=-(n+1)b_n$ ………②

(2)　②より，$\dfrac{b_{n+1}}{(n+1)!}=-\dfrac{b_n}{n!}$ と変形すると，

$$\frac{b_n}{n!}=\frac{b_1}{1!}(-1)^{n-1}=(-1)^n,\quad b_n=(-1)^n n!$$

①に代入すると，$a_{n+1}=-(n+1)a_n+(-1)^n n!$

両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割って，

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=\frac{a_n}{(-1)^n n!}-\frac{1}{n+1}$$

$n\geqq 2$ において，

$$\frac{a_n}{(-1)^n n!}=\frac{a_1}{(-1)^1\cdot 1!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=-h_n$$

よって，$a_n=-(-1)^n n!h_n$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=-(-1)\cdot 1!\cdot 1=1$ となり，$n=1$ のときも成立する。

[解　説]

b_n の一般項はパタン通りに求められますが，a_n の一般項を求めることも考えて，2つの漸化式に同様の変形を加えました。

2

問題のページへ

2 次方程式$z^2-2z-w=0$の解を$z=\alpha$，βとすると，解と係数の関係から，

$\alpha+\beta=2$………①，$\alpha\beta=-w$………②

①より，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$………③

よって, 2 点α，βを結ぶ線分の中点は，点 1 である。

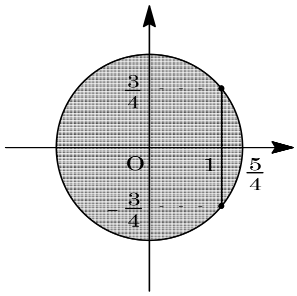
また，条件より，$|\alpha|\leqq\dfrac{5}{4}$，$|\beta|\leqq\dfrac{5}{4}$なので，②から，

$$|w|=|-\alpha\beta|=|\alpha||\beta|\leqq\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{25}{16}$$

すると，$|w|$が最大になるのは，$|\alpha|=|\beta|=\dfrac{5}{4}$の場合である。そこで，図から，③を満たす$\alpha$，$\beta$は，

$\alpha=1\pm\dfrac{3}{4}i$，$\beta=1\mp\dfrac{3}{4}i$（複号同順）

このとき，$w=-\alpha\beta=-\left(1\pm\dfrac{3}{4}i\right)\left(1\mp\dfrac{3}{4}i\right)=-\dfrac{25}{16}$



[解 説]

意味のつかみにくい問題文ですが，$z^2-2z-w=0$の解がともに$|z|\leqq\dfrac{5}{4}$である条件を求めるという設問に一致します。図に依存した直観的な解法を記しました。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}\}+\frac{1}{2}x\cdot(-2)e^{-2(x-1)}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}$$

$$f''(x)=-e^{-2(x-1)}+\left(\frac{1}{2}-x\right)(-2)e^{-2(x-1)}$$

$$=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

よって，$x>\dfrac{1}{2}$における$f'(x)$の増減は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\frac{1}{2}$から，$0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$である。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2)　(1)より，$f'(x)\geqq 0$なので，$x>\dfrac{1}{2}$で$f(x)$は単調に増加する。

すると，$x_0>\dfrac{1}{2}$から$x_1=f(x_0)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(1+e)>\dfrac{1}{2}$となり，帰納的に，$x_n>\dfrac{1}{2}$である。

さて，$x_n\neq 1$のとき，c_nを1とx_nの間の数として，平均値の定理より，

$$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c_n),\quad f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)$$

そこで，$x_{n+1}=f(x_n)$，$1=f(1)$から，

$$|x_{n+1}-1|=|f(x_n)-f(1)|=|f'(c_n)||x_n-1|$$

$x_n>\dfrac{1}{2}$より$c_n>\dfrac{1}{2}$となるので, (1)より$|f'(c_n)|<\dfrac{1}{2}$であり,

$$|x_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|x_n-1|$$

$x_n=1$のときは，$x_{n+1}=f(1)=1$なので，このときも含めて，

$$|x_{n+1}-1|\leqq\frac{1}{2}|x_n-1|$$

よって，$|x_n-1|\leqq|x_0-1|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

これより, $n\to\infty$のとき，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\to 0$より$|x_n-1|\to 0$となり,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

[解 説]

漸化式で表された数列の極限を求めるときに，平均値の定理を利用する典型的な問題です。

4

問題のページへ

$a^2-a=a(a-1)$であり，条件より, aは奇数，$a-1$は偶数となる。

ここで, aと$a-1$の公約数をgとし, b, cを正の整数とすると,

$a=gb$ ………①，$a-1=gc$ ………②

①②より，$g(b-c)=1$

よって, gは1の正の約数から$g=1$となり, aと$a-1$は互いに素である。

さて，$10000=2^4\times5^4$なので，a^2-aが 10000 で割り切れるとき，偶数$a-1$は2^4という約数をもち, kを整数として,

$a-1=2^4\times k$ ………③

すると, $3\leqq a\leqq 9999$ より，$2\leqq 2^4\times k\leqq 9998$となり，$1\leqq k\leqq 624$である。

よって, kが5^4を約数としてもつことはない。

また, kが約数として，5^i $(i=1,\ 2,\ 3)$をもつと仮定すると, aはそれぞれ5^{4-i}という約数をもつことになり, aと$a-1$が互いに素であることに反する。

以上より, lを奇数として,

$a=5^4\times l$ ………④

③④より，$5^4\times l-1=2^4\times k$，$625l-16k=1$ ………⑤

⑤を満たす1つの$(l,\ k)$は，$(l,\ k)=(1,\ 39)$なので,

$625\times1-16\times39=1$ ………⑥

⑤⑥より，$625(l-1)-16(k-39)=0$，$625(l-1)=16(k-39)$

625と16は互いに素なので, nを整数として,

$l-1=16n$，$l=16n+1$

④から，$a=5^4(16n+1)=625(16n+1)$

そこで, $3\leqq a\leqq 9999$ より, $0<16n+1<16$となり，$n=0$のみ満たされる。

よって，求めるaは，$a=625$である。

[解 説]

当然ですが，aと$a-1$は互いに素です。この事実とaの範囲に制限があることが，本問を解くうえでのポイントとなっています。

5

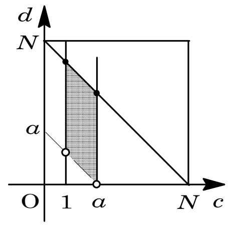
問題のページへ

(1)　まず，$b=0$ のとき，$a+b>N$ となることはありえないので，乙が勝つのは次の2通りとなる。

(i)　$c>a$ のとき

$a<c\leqq N$ より，条件を満たす整数 c は $N-a$ 個存在するので，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{N-a}{N}$ である。

(ii)　$c\leqq a$ かつ $a<c+d\leqq N$ のとき



条件を満たす整数 $(c,\ d)$ は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数が $a(N-a)$ より，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{a(N-a)}{N^2}$ である。

(i)(ii)より，乙が勝つ確率は，

$$\frac{N-a}{N}+\frac{a(N-a)}{N^2}=\frac{N^2-a^2}{N^2}$$

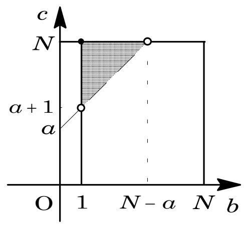
よって，甲が勝つ確率は，$1-\dfrac{N^2-a^2}{N^2}=\dfrac{a^2}{N^2}$ である。

(2)　$b\geqq 1$ のとき，乙が勝つ場合は次の3通りである。

(i)　$a+b>N$ のとき

$N-a<b\leqq N$ より，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{N-(N-a)}{N}=\dfrac{a}{N}$ である。

(ii)　$a+b\leqq N$ かつ $a+b<c$ のとき



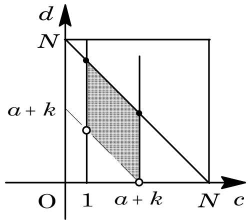
条件を満たす整数 $(b,\ c)$ は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数は，

$$1+2+\cdots\cdots+(N-a-1)=\frac{1}{2}(N-a-1)(N-a)$$

よって，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2}$ である。

(iii)　$a+b\leqq N$ かつ $a+b\geqq c$ かつ $a+b<c+d\leqq N$ のとき

まず b を固定し，$b=k\ (1\leqq k\leqq N-a)$ における乙の勝つ確率を p_k とおく。



条件を満たす整数 $(c,\ d)$ は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数は $(a+k)(N-a-k)$ となるので，

$$p_k=\frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2}$$

ここで，甲が数字 k の書かれたカードを引く確率はつねに $\dfrac{1}{N}$ なので，このとき乙の勝つ確率 P は，

$$P=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-a}p_k=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-a}\frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2}=\frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N-a}(a+k)(N-a-k)$$

ここで，$a+k=l$ とおくと，

$$P=\frac{1}{N^3}\sum_{l=a+1}^{N}l(N-l)=\frac{1}{N^2}\sum_{l=a+1}^{N}l-\frac{1}{N^3}\sum_{l=a+1}^{N}l^2$$
$$=\frac{(N+a+1)(N-a)}{2N^2}-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

(i)(ii)(iii)より，乙が勝つ確率は，

$$\frac{a}{N}+\frac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2}+P$$
$$=\frac{a}{N}+\frac{N-a}{N}-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$
$$=1-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

よって，甲が勝つ確率は，$\dfrac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$ である。

[解 説]

問題文で乙の勝つ場合が設定されているので，(1)(2)とも乙が勝つ事象の余事象として，甲の勝つ確率を求めました。文字がたくさん出てくるので，頭を整理するために，格子点の個数を対応させ，朴訥に解いてみました。

6

問題のページへ

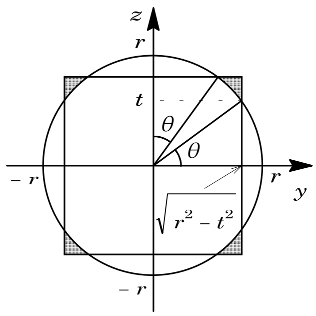
不等式$x^2+y^2\leqq r^2$……①，$y^2+z^2\geqq r^2$……②，$z^2+x^2\leqq r^2$……③で表される立体をKとおく。

まず，K は yz 平面に対称であり，$x\geqq 0$ の部分を考える。そこで，K を平面$x=t$ $(0\leqq t\leqq r)$で切ったときの断面を表す式は，①③より，

$$y^2\leqq r^2-t^2,\ -\sqrt{r^2-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{r^2-t^2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

$$z^2\leqq r^2-t^2,\ -\sqrt{r^2-t^2}\leqq z\leqq\sqrt{r^2-t^2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって，平面$x=t$上の断面は，②④⑤の連立式として表される。



この断面が存在する条件は，$\sqrt{r^2-t^2}\geqq r\cos\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2}\geqq r,\ 2(r^2-t^2)\geqq r^2$$

$0\leqq t\leqq r$から，$0\leqq t\leqq\dfrac{r}{\sqrt{2}}$

このとき，右図のようにθを設定すると，

$$r\cos\theta=\sqrt{r^2-t^2},\ r\sin\theta=t\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，断面積を$S(t)$とおくと，

$$S(t)=4\left\{\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2-\frac{1}{2}t\sqrt{r^2-t^2}\times 2-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$=(4-\pi)r^2-4t^2-4t\sqrt{r^2-t^2}+4r^2\theta$$

よって，Kの体積Vは，

$$V=2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}S(t)\,dt=2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\{(4-\pi)r^2-4t^2-4t\sqrt{r^2-t^2}+4r^2\theta\}dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\{(4-\pi)r^2-4t^2\}dt=\left[(4-\pi)r^2t-\frac{4}{3}t^3\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}=\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)r^3$

また，$u=\sqrt{r^2-t^2}$ とおくと，$u^2=r^2-t^2$から，$2udu=-2tdt$となり，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}4t\sqrt{r^2-t^2}\,dt=4\int_r^{\frac{r}{\sqrt{2}}}u(-u)\,du=4\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r u^2\,du=4\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r$$

$$=\left(\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)r^3$$

さらに，⑥より，$r\cos\theta\,d\theta=dt$なので，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}4r^2\theta\,dt=4r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\cos\theta\,d\theta=4r^3\left\{\left[\theta\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta\right\}$$

$$=4r^3\left\{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left[\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\}=4r^3\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+2\sqrt{2}-4\right)r^3$$

以上より，

$$V=2\left\{\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)r^3-\left(\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)r^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+2\sqrt{2}-4\right)r^3\right\}$$

$$=\left(8\sqrt{2}-\frac{32}{3}\right)r^3$$

[解 説]

②式の不等号が逆向きになると，有名問題です。パラメータθの置き方については，1994 年, 1998 年, 2003 年の類題が参考になります。