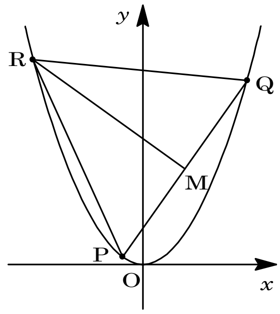
1

問題のページへ



$p<q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2},\quad q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，

$$\mathrm{M}\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\right)$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，$p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$なので，

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\left(2-\frac{a^2}{3}\right)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$である。

ここで，$\triangle\mathrm{PQR}$ は 1 辺の長さ a の正三角形より，

$$\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ},\quad \mathrm{RM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので，

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,\quad \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp 2a+a^2)$$

まとめると，$5a^2\mp 18a=0$ となり，$a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

[解 説]

まず，複素数平面上での回転を用いて考えました。しかし，計算がかなり複雑になってしまい，方向転換をした結果が上の解です。

2

問題のページへ

(1)　p, q を $p \geqq 1$, $0 \leqq q \leqq 9$ である整数として，3 桁以上の平方数を $(10p+q)^2$ とおく。

$$(10p+q)^2 = p^2 \times 100 + 2pq \times 10 + q^2$$

すると，q^2 の 1 の位が $(10p+q)^2$ の 1 の位の数 b となる。また，$2pq$ とくり上がりの数の和の 1 の位が $(10p+q)^2$ の 10 の位の数 a である。

さて，$2pq$ は偶数なので，$a+b$ が偶数となるのは，右表より，$q=0$，$q=2$，$q=8$ の場合のみであり，このとき, b は 0 または 4 である。

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2 の 1 の位	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
くり上がり	0	0	0	0	1	2	3	4	6	8

(2)　p, q, r を $p \geqq 1$, $0 \leqq q \leqq 9$, $0 \leqq r \leqq 9$ である整数として，5 桁以上の平方数を $(100p+10q+r)^2$ とおくと，条件より，10 の位の数と 1 の位の数が同じ数となるので，その和は偶数である。

よって，$(100p+10q+r)^2$ の 1 の位の数は, (1)より 0 または 4 である。

(i)　1 の位の数が 0 のとき　1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数もすべて 0 なので，この平方数は 10000 で割り切れる。

(ii)　1 の位の数が 4 のとき　1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数もすべて 4 である。このとき, (1)より $r=2$ または $r=8$ である。

(ii-i)　$r=2$ のとき　$(100p+10q+2)^2 = 4(50p+5q+1)^2$

n を自然数として，$(100p+10q+2)^2 = 10000n+4444$ と仮定すると，

$$(50p+5q+1)^2 = 2500n+1111$$

これより，$(50p+5q+1)^2$ の 10 の位の数と 1 の位の数は，ともに 1 である。

すると，平方数の 10 の位の数と 1 の位の数の和は偶数となるが，(1)で示したように，この場合はありえない。

(ii-ii)　$r=8$ のとき　$(100p+10q+8)^2 = 4(50p+5q+4)^2$

n を自然数として，$(100p+10q+8)^2 = 10000n+4444$ と仮定すると，

$$(50p+5q+4)^2 = 2500n+1111$$

(i)と同様に，この場合もありえない。

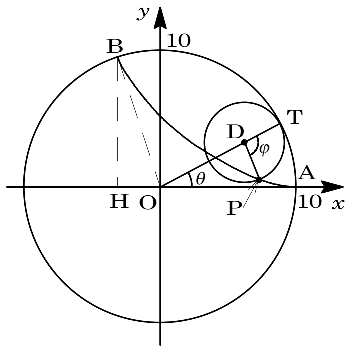
(i)(ii)より，$(100p+10q+r)^2$ は 10000 で割り切れる。

[解 説]

わかってしまえばそれまでですが，道に迷いながら，論理を詰めていくには，かなりのエネルギーが必要となります。

3

問題のページへ



初めの点 P の位置を A(10, 0)，円板 D を円 C に内接させながら転がし，点 P が再び円 C の円周に接する点を B とする。

また，円板 D の中心を D とし，OD と x 軸の正の向きとのなす角を θ とおく。さらに，2 円の接点を T とおき，$\angle\mathrm{TDP}=\varphi$ とすると，

$$10\theta = 3\varphi,\ \ \varphi=\frac{10}{3}\theta$$

$0\leqq\varphi\leqq 2\pi$ のとき，$0\leqq\theta\leqq\frac{3}{5}\pi$ となることより，$\mathrm{B}\left(10\cos\frac{3}{5}\pi,\ 10\sin\frac{3}{5}\pi\right)$である。

また, B から x 軸に下ろした垂線の足を $\mathrm{H}\left(10\cos\frac{3}{5}\pi,\ 0\right)$とおく。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=(7\cos\theta,\ 7\sin\theta)+(3\cos(\theta-\varphi),\ 3\sin(\theta-\varphi))$

$$=(7\cos\theta,\ 7\sin\theta)+\left(3\cos\left(-\frac{7}{3}\theta\right),\ 3\sin\left(-\frac{7}{3}\theta\right)\right)$$

$$=\left(7\cos\theta+3\cos\frac{7}{3}\theta,\ 7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)$$

ここで，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=7\cos\theta+3\cos\frac{7}{3}\theta,\ \ y=7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta$$

まず，扇形 OAB の面積は，$\angle\mathrm{AOB}=\frac{3}{5}\pi$ より，$\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{3}{5}\pi=30\pi$ である。

次に，△OBH の面積は，$\angle\mathrm{BOH}=\pi-\frac{3}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi$ より，

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cos\frac{2}{5}\pi\cdot 10\sin\frac{2}{5}\pi=50\cos\frac{2}{5}\pi\sin\frac{2}{5}\pi=25\sin\frac{4}{5}\pi$$

点 P の描く曲線 AB と x 軸，直線 BH に囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S=\int_{10\cos\frac{3}{5}\pi}^{10} y\,dx=\int_{\frac{3}{5}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\left(-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=7\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(7\sin^2\theta+4\sin\frac{7}{3}\theta\sin\theta-3\sin^2\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

さて，$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{5}\pi}7\sin^2\theta\,d\theta=\frac{7}{2}\int_0^{\frac{3}{5}\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{7}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{3}{5}\pi}$

$$=\frac{21}{10}\pi-\frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi$$

$$\int_0^{\frac{3}{5}\pi}4\sin\frac{7}{3}\theta\sin\theta\,d\theta=-2\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(\cos\frac{10}{3}\theta-\cos\frac{4}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=-2\left[\frac{3}{10}\sin\frac{10}{3}\theta-\frac{3}{4}\sin\frac{4}{3}\theta\right]_0^{\frac{3}{5}\pi}=\frac{3}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$$

$$\int_0^{\frac{3}{5}\pi} 3\sin^2\frac{7}{3}\theta\,d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(1-\cos\frac{14}{3}\theta\right)d\theta = \frac{3}{2}\Big[\theta - \frac{3}{14}\sin\frac{14}{3}\theta\Big]_0^{\frac{3}{5}\pi}$$
$$= \frac{9}{10}\pi - \frac{9}{28}\sin\frac{4}{5}\pi$$

よって，$S = 7\left(\frac{21}{10}\pi - \frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi + \frac{3}{2}\sin\frac{4}{5}\pi - \frac{9}{10}\pi + \frac{9}{28}\sin\frac{4}{5}\pi\right)$
$$= 7\left(\frac{6}{5}\pi - \frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi + \frac{51}{28}\sin\frac{4}{5}\pi\right)$$

以上より，円 C の内側で，曲線 AB の上側の部分の面積は,
$$30\pi + 25\sin\frac{4}{5}\pi - 7\left(\frac{6}{5}\pi - \frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi + \frac{51}{28}\sin\frac{4}{5}\pi\right)$$
$$= \frac{108}{5}\pi + \frac{49}{4}\sin\frac{4}{5}\pi + \frac{49}{4}\sin\frac{6}{5}\pi = \frac{108}{5}\pi + \frac{49}{4}\sin\frac{4}{5}\pi - \frac{49}{4}\sin\frac{4}{5}\pi$$
$$= \frac{108}{5}\pi$$

また，曲線 AB によって分けられた円 C のもう 1 つの部分の面積は,
$$10^2\pi - \frac{108}{5}\pi = \frac{392}{5}\pi$$

[解 説]

よく見かける内サイクロイドが題材になっています。ただ，積分計算は，かなり多めです。

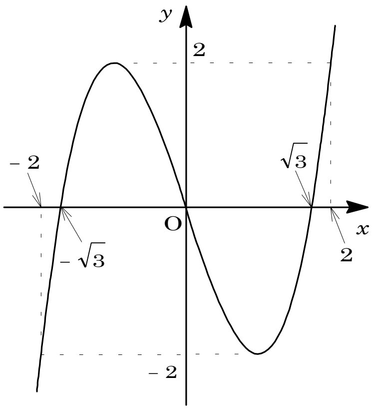
4

問題のページへ

(1)　$f_1(x)=x^3-3x$ より，$f_1'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$f_1(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は，$y=f_1(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数に等しいので，右表より，$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個，$a=\pm2$ のとき 2 個，$-2<a<2$ のとき 3 個である。



(2)　$f_1(x)=t$ とおくと，$f_2(x)=a$ は，

$$t^3-3t=a\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$a<-2$ のとき

(*)は $t<-2$ に解を 1 個もつので，$f_1(x)=t$ の解 x は 1 個である。

(ii)　$a=-2$ のとき

(*)の解は $t=-2,\ 1$ となり，$f_1(x)=t$ の解 x は $2+3=5$ 個となる。

(iii)　$-2<a<2$ のとき

(*)は $-2<t<2$ に解を 3 個もつので，$f_1(x)=t$ の解 x は $3\times3=9$ 個である。

(iv)　$a=2$ のとき

(*)の解は $t=-1,\ 2$ となり，$f_1(x)=t$ の解 x は $3+2=5$ 個となる。

(v)　$a>2$ のとき

(*)は $t>2$ に解を 1 個もつので，$f_1(x)=t$ は解 x は 1 個である。

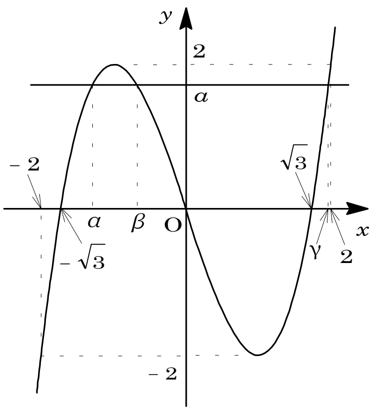
(i)〜(v)より，$f_2(x)=a$ の解の個数は，次のようになる。

$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個，$a=\pm2$ のとき 5 個，$-2<a<2$ のとき 9 個

(3)　$-2<a<2$ のとき，$f_n(x)=a$ を満たす実数 x が $-2<x<2$ に 3^n 個あるという命題が，すべての自然数に対して成立することを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$f_1(x)=a$ の解は，(1)より $-2<x<2$ に 3 個ある。これを $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおく。



(ii)　$n=k$ のとき

$-2<t<2$ のとき $f_k(x)=t$ の解が $-2<x<2$ に 3^k 個あると仮定する。

このとき，$f_{k+1}(x)=a$ は，

$$t^3-3t=a\ ,\ f_1(\,f_k(x)\,)=a$$

すると，解は $f_k(x)=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ より求まる。

仮定より，$f_k(x)=\alpha$，$f_k(x)=\beta$，$f_k(x)=\gamma$ の解は，$-2<\alpha<\beta<\gamma<2$ から，$-2<x<2$ に，それぞれ 3^k 個ずつあり，それらはすべて異なる。

すなわち，$f_{k+1}(x)=a$ の解は，$-2<x<2$ に $3\times 3^k=3^{k+1}$ 個存在する。

(i)(ii)より, $n\geqq 1$，$-2<a<2$ では，$f_n(x)=a$ は $-2<x<2$ に 3^n 個の解をもつ。

そこで, $n\geqq 1$ を $n\geqq 3$ とし, a の値を $a=0$ に限定しても上の命題は成り立つので, $n\geqq 3$ のとき $f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n である。

[解 説]

実数解の個数を調べる頻出問題ですが，ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。特に(3)で，数学的帰納法を十分に機能させるために，拡張した命題を証明しなくてはならないという点が，その最たるところです。

5

問題のページへ

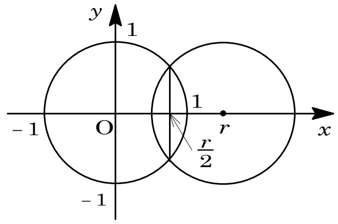
(1) (i)　$r \geqq 2$ のとき

球 A と B は共通部分がないので，$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{8}{3}\pi$ である。

(ii)　$0 < r < 2$ のとき

円 $x^2 + y^2 = 1$ と円 $(x - r)^2 + y^2 = 1$ を x 軸のまわりに回転して，球 A と B をつくると考える。

そして，直線 $x = \frac{r}{2}$ に関する対称性を考慮すると，



球 A と B の和集合の体積 V は，

$$V = 2\pi\int_{-1}^{\frac{r}{2}}(1 - x^2)\,dx = 2\pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{r}{2}}$$

$$= 2\pi\left\{\frac{r}{2} + 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{r^3}{8} + 1\right)\right\} = \pi\left(-\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3}\right)$$

ここで，$\frac{dV}{dr} = \pi\left(-\frac{r^2}{4} + 1\right) = -\frac{\pi}{4}(r + 2)(r - 2)$ より，

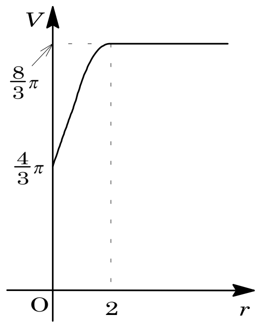
r	0	$\cdots$	2
$\frac{dV}{dr}$	1	＋	0
V	$\frac{4}{3}\pi$	↗	$\frac{8}{3}\pi$

V は $0 < r < 2$ で右表のように単調に増加し，さらに

$$\frac{d^2V}{dr^2} = -\frac{\pi}{2}r < 0$$

これから，グラフは上に凸である。

(i)(ii)より，V のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$\frac{8}{3}\pi > \frac{8}{3} \times 3.14 > 8$ より，$V = 8$ となる r は，$0 < r < 2$ にただ 1 つ存在する。

(1)より，$\pi\left(-\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3}\right) = 8 \cdots\cdots\cdots(*)$

$$-\frac{r^3}{12} + r + \frac{4}{3} = \frac{8}{\pi},\quad -r^3 + 12r = \frac{96}{\pi} - 16$$

ここで，$3.14 < \pi < 3.15$ より，$14.47 < \frac{96}{\pi} - 16 < 14.58$

$r = 1.5$ のとき，$-r^3 + 12r = 1.5 \times (12 - 2.25) = 14.625$

$r = 1.4$ のとき，$-r^3 + 12r = 1.4 \times (12 - 1.96) = 14.056$

$r = 1.45$ のとき，$-r^3 + 12r \quad 1.45 \times (12 - 2.10) = 14.355$

以上より，(*)を満たす r の小数第 1 位までの概数は 1.5 である。

[解 説]

数値計算が超難です。(2)では，グラフから，r の値が 2 より少し小さいと判断し，とりあえず 1.5 で計算し，その後，微調整をしました。電卓なしで計算するのは，本当に疲れます。

6

問題のページへ

(1)　正方形の 3 枚の板を，左から A, B, C とする。3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となるのは 3 つの場合があり，確率はそれぞれ次のようになる。

(i)　A を 3 回裏返す場合　$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ii)　A を 1 回裏返し B を 2 回裏返す場合　${}_3C_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(iii) A を 1 回裏返し C を 2 回裏返す場合　${}_3C_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{7}{27}$ である。

(2)　3 枚の板の両端の色に注目して，n 回の操作の結果，A と C の板が「白・白」となる確率を p_n，「白・黒」または「黒・白」となる確率を q_n，「黒・黒」となる確率を r_n おく。このとき，$p_1=\frac{1}{3}$，$q_1=\frac{2}{3}$，$r_1=0$ である。

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$p_n+q_n+r_n=1$ より，②から，$q_{n+1}=\frac{2}{3}(1-q_n)+\frac{1}{3}q_n=-\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}$

$$q_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(q_n-\frac{1}{2}\right),\quad q_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって，$q_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{1}{3}p_n-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots④$

④を満たす 1 つの数列を，α，β を定数として，$p_n=\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\beta$ とおくと，

$$\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\beta=\frac{1}{3}\left\{\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\beta\right\}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots⑤$$

すると，$-\frac{1}{3}\alpha=\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{6}$，$\beta=\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{6}$ より，$\alpha=\beta=\frac{1}{4}$ となる。

④⑤より，$p_{n+1}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left\{p_n-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\right\}$

$$p_n-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

以上より，求める両端が白の確率は，$p_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$

[解　説]

確率の計算に，漸化式を利用する頻出問題です。なお，漸化式の解き方の詳細については，「ピンポイントレクチャー」を参照してください。