1　　問題のページへ

$f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，$f(-1)=-1$，$f(1)=1$ より，

$$a-b+c=-1\cdots\cdots①,\ \ a+b+c=1\cdots\cdots②$$

①②より，$b=1$，$c=-a$

さて，$g(x)=3x^2-1-f(x)$ とおくと，

$$g(x)=3x^2-1-(ax^2+x-a)=(3-a)x^2-x+(a-1)$$

ここで，$-1\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$g(x)\geqq 0$ である条件は，

(i) $3-a\leqq 0$ $(a\geqq 3)$ のとき

$y=g(x)$ のグラフは，直線または上に凸の放物線であり，$g(-1)=3$，$g(1)=1$ より，$g(x)\geqq 0$ は成立する。

(ii)　$3-a>0$ $(a<3)$ のとき

$y=g(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は $x=\dfrac{1}{2(3-a)}>0$ である。

(ii-i)　$0<\dfrac{1}{2(3-a)}\leqq 1$ $\left(a\leqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$g(x)\geqq 0$ である条件は，$g(x)=0$ の判別式が 0 以下であることと等しい。

$$D=1-4(3-a)(a-1)\leqq 0,\ \ 4a^2-16a+13\leqq 0$$

よって，$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$ となり，$a\leqq\dfrac{5}{2}$ と合わせて $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{5}{2}$

(ii-ii)　$\dfrac{1}{2(3-a)}>1$ $\left(\dfrac{5}{2}<a<3\right)$

$g(-1)=3$，$g(1)=1$ より，$g(x)\geqq 0$ は成立する。

(i)(ii)より，$a\geqq\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$

このとき，$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx=\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2dx=2\int_{0}^{1}(4a^2x^2+1)dx$

$$=2\Big[\frac{4}{3}a^2x^3+x\Big]_0^1=\frac{8}{3}a^2+2$$

すると，$I\geqq\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2+2=\dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}$ となる。

[解 説]

文系に類題がありますが，理系では条件が 1 つ少ないために場合分けが必要となります。

2

問題のページへ

(1)　点$\mathrm{P}(z)$とし，$z=\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$とおくと，

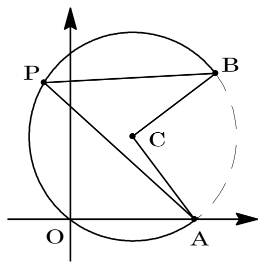
$$\frac{(7+7i)-z}{6-z}=\frac{(7+7i)\{(t-7)-ti\}-14(t-3)}{6\{(t-7)-ti\}-14(t-3)}=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}$$

$$=\frac{7+49i}{8t+6ti}=\frac{(7+49i)(8-6i)}{t(8+6i)(8-6i)}=\frac{7+7i}{2t}$$

$t>0$ より，$\arg\dfrac{(7+7i)-z}{6-z}=\arg\dfrac{7}{2t}(1+i)=45^\circ$

よって，$\angle\mathrm{APB}=45^\circ$

(2)　(1)より，点 P は$\angle\mathrm{APB}$が一定より，2 点 A，B を通る円周上にある。さらに，PA から PB を測った角が45°なので，点 P は，右図の実線部に存在する。



この円の中心を$\mathrm{C}(w)$とおくと，$\angle\mathrm{ACB}=2\angle\mathrm{APB}=90^\circ$より，点 C を中心に A を$90^\circ$回転すると B になるので，

$(7+7i)-w=i(6-w)$，$(1-i)w=7+i$

$w=\dfrac{7+i}{1-i}=3+4i$

さて，$\mathrm{OC}=|w|=5$，円の半径$\mathrm{AC}=|w-6|=|-3+4i|=5$より，線分 OP の長さが最大になる点 P の位置は, OC の延長と円との交点であり，$z=2w=6+8i$の場合である。

$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6+8i$，$14(t-3)=(6+8i)(t-7-ti)$，$(t-28)i=0$

よって, OP が最大になるのは$t=28$のときである。

[解 説]

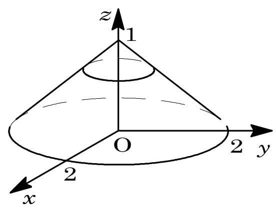
誘導に従っていくと，一見，複雑そうに見える点 P の動きがよくわかってきます。なお，計算量も適当なものです。

3

問題のページへ

(1)　円錐 A を平面 $z=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で切断したとき，その切り口の円の半径を r とすると，

$$r:2=1-t:1,\ \ r=2(1-t)$$

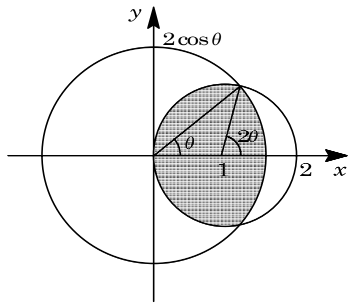


よって，$z=t$ 上で，この円の方程式は，

$$x^2+y^2=4(1-t)^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，円柱 B は，中心 $(1,\ 0,\ 0)$ で半径 1 の円を底面とし，中心軸が z 軸に平行なので，その方程式は，$z=t$ 上でも，

$$(x-1)^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots②$$



①と②の交点は，①－②より，

$$2x=4(1-t)^2,\ \ x=2(1-t)^2$$

$t=1-\cos\theta$ とおくと $x=2\cos^2\theta$ となり，①の半径が $r=2\cos\theta$ から $\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ である。

①より $y^2=4\cos^2\theta-4\cos^4\theta=4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)$

$$=4\cos^2\theta\sin^2\theta=\sin^2 2\theta$$

よって，$y=\pm\sin 2\theta$ となり，共通部分の面積は，

$$S(t)=2\left\{\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin 2\theta\right\}$$

$$=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi$$

(2)　$t=1-\cos\theta$ より，$\dfrac{dt}{d\theta}=\sin\theta$ となり，$t=0$ のとき $\theta=0$，$t=1$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta\sin\theta-\sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\cos 2\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\sin 3\theta-\sin\theta)\,d\theta$

$$=-\left[\theta\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)d\theta=-\frac{10}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3\theta-\cos\theta)\,d\theta=\frac{2}{3}$$

よって，$V=-\dfrac{10}{9}-\dfrac{2}{3}+\pi\cdot 1=\pi-\dfrac{16}{9}$

[解 説]

空間図形の求積に関する頻出題です。誘導の与え方を見て，似た問題があったという記憶があり，調べてみると，それは 1994 年度の 3 番でした。

4

問題のページへ

(1)　$x^2-4x-1=0$ の解は $x=2\pm\sqrt{5}$ で，$\alpha>\beta$ から $\alpha=2+\sqrt{5}$，$\beta=2-\sqrt{5}$ となる。

$$s_1=\alpha+\beta=4$$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16+2=18$$

$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64+12=76$$

また，α，β は $x^2-4x-1=0$ の解なので，$\alpha^2-4\alpha-1=0$ となり，

$$\alpha^2=4\alpha+1,\ \alpha^n=4\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}$$

同様にして，$\beta^n=4\beta^{n-1}+\beta^{n-2}$ なので，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})+(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=4s_{n-1}+s_{n-2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$-1<\beta<0$ なので $-1<\beta^3<0$ となる。

よって，β^3 以下の最大の整数は -1 である。

(3)　(1)より s_1，s_2 がともに正の整数なので, (＊)から帰納的に s_n は正の整数である。

さて, 数列 $\{s_n\}$ の 1 の位の数を a_n とすると, (1)より $a_1=4$，$a_2=8$ である。

(＊)から s_n の 1 の位のみ計算すると，$4\times8+4=36$ から $a_3=6$，$4\times6+8=32$ から $a_4=2$，$4\times2+6=14$ から $a_5=4$，$4\times4+2=18$ から $a_6=8$ となる。

これから, (＊)を用いると，数列 $\{a_n\}$ は, 4, 8, 6, 2, 4, 8, …と周期 4 の周期数列であることが帰納的にわかる。

したがって，$2003=4\times500+3$ から，s_{2003} の 1 の位の数は s_3 の 1 の位の数と等しく, 6 である。

また，$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ であり，(2)と同様にして $-1<\beta^{2003}<0$ より，α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数は 6 となる。

[解　説]

文系に類題があるのですが，理系のこの問題では，数値が少し異なるだけにもかかわらず, (＊)を用いてオーソドックスに周期性の説明を行おうとすると，たいへん時間がかかりそうでした。a_1 と a_2 の特性について調べるのが，一筋縄ではいかないからです。そのため, 1 の位だけを計算して，周期性が現れたところで，それ以降は「帰納的に」と書いているわけです。

5

問題のページへ

(1)　X_n が 5 で割り切れる事象を A とすると，$\overline{A}$ は X_n が 5 で割り切れない，すなわち第 1 回目から第 n 回目まで 5 以外の目が出る事象を表すので，$P(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ となる。

よって，$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2)　X_n が 4 で割り切れる事象を B とすると，$\overline{B}$ は X_n が 4 で割り切れない事象を表し，第 1 回目から第 n 回目まで奇数の目が n 回出るか，奇数の目が $n-1$ 回出て残り 1 回が 2 または 6 の目が出る場合を意味する。

$$P(\overline{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)　X_n が 20 で割り切れる事象は $A\cap B$ なので，

$$p_n=P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})$$
$$=1-\left\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right\}=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

さて，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は X_n が 5 でも 4 でも割り切れない事象を表し，第 1 回目から第 n 回目まで 1 または 3 の目が n 回出るか，1 または 3 の目が $n-1$ 回出て残り 1 回が 2 または 6 の目が出る場合を意味する。

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$1-p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n-(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

$$\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\frac{1}{n}\log\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$
$$=\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

ここで，一般的に $-1<r<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}r^n=0$，$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ なので，

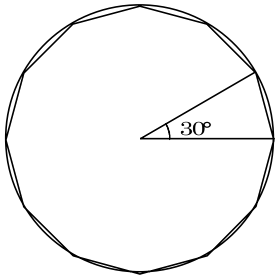
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}$$

[解　説]

有名問題です。最後の $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ は，証明を省略して使っています。

6

問題のページへ



半径 1 の円に正十二角形を内接させ，正十二角形の 1 辺の長さを l をすると，余弦定理より，

$$l^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 30^\circ = 2-\sqrt{3}\,,\ \ l = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

さて，明らかに正十二角形の周の長さは，円周の長さ 2π より短いので，

$$12l < 2\pi\,,\ \ 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi\,,\ \ 36(2-\sqrt{3}) < \pi^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$1.73^2 < 3 < 1.74^2$ から $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ となるので，

$$36(2-\sqrt{3}) > 9.36 > 9.3025 = 3.05^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より $\pi^2 > 3.05^2$ となり，円周率 π は 3.05 より大きい。

[解　説]

1 年ほど前，「円周率が 3 ならば円と正六角形は同じなると塾の先生が言っていた」と子供が話していたことを思い出しました。正八角形を用いても証明はたぶんできるだろうという気がしましたが，安全策をとり正十二角形を用いました。