

1

問題のページへ

球面の中心を O , CD の中点を M , AB の中点を N とすると、対称性から、中心 O は ABM 上にある。

まず、 $AM = BM = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ より、 ABM は正三角形となる。

$$OA = OB = r, \quad OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \sqrt{r^2 - 1}$$

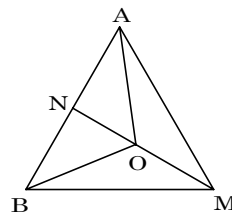
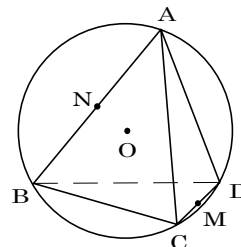
また、 $MN = \sqrt{3} \sin 60^\circ = \frac{3}{2}$ より、

$$ON = \frac{3}{2} - \sqrt{r^2 - 1}$$

$$ONA \text{ に対して、} r^2 = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{r^2 - 1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$r^2 = \frac{9}{4} - 3\sqrt{r^2 - 1} + r^2 - 1 + \frac{3}{4}$$

よって、 $3\sqrt{r^2 - 1} = 2$ より、 $r = \frac{\sqrt{13}}{3}$



[解説]

第 1 問は三角比の空間図形への応用問題です。正四面体ではないものの、対称性から、どの切断面を考えればよいのかは、自然に決まります。

2

問題のページへ

$$\begin{aligned} \text{まず, } \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y) dy &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin x \cos y + \cos x \sin y) f(y) dy \\ &= \frac{a}{2\pi} \left(\sin x \int_0^{2\pi} \cos y f(y) dy + \cos x \int_0^{2\pi} \sin y f(y) dy \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y) dy &= \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x \cos y + \sin x \sin y) f(y) dy \\ &= \frac{b}{2\pi} \left(\cos x \int_0^{2\pi} \cos y f(y) dy + \sin x \int_0^{2\pi} \sin y f(y) dy \right) \end{aligned}$$

ここで, $A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos y f(y) dy \dots\dots$, $B = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin y f(y) dy \dots\dots$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y) dy + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y) dy + \sin x + \cos x \\ &= a(A \sin x + B \cos x) + b(A \cos x + B \sin x) + \sin x + \cos x \\ &= (aA + bB + 1) \sin x + (aB + Ab + 1) \cos x \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よ} \text{り, } A &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(aA + bB + 1) \sin y \cos y + (aB + Ab + 1) \cos^2 y\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{(aA + bB + 1) \sin 2y + (aB + Ab + 1)(1 + \cos 2y)\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} (aB + Ab + 1) \cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$2A = aB + Ab + 1, \quad (2-b)A - aB = 1 \dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned} \text{よ} \text{り, } B &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(aA + bB + 1) \sin^2 y + (aB + Ab + 1) \sin y \cos y\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{(aA + bB + 1)(1 - \cos 2y) + (aB + Ab + 1) \sin 2y\} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} (aA + bB + 1) \cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$2B = aA + bB + 1, \quad -aA + (2-b)B = 1 \dots\dots\dots$$

$$\text{をまとめると, } \begin{pmatrix} 2-b & -a \\ -a & 2-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

さて, $f(x)$ がただ 1 つ定まるのは, $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ がただ 1 つ定まることと同値なので,

から $\begin{pmatrix} 2-b & -a \\ -a & 2-b \end{pmatrix}^{-1}$ が存在する。

$$(2-b)^2 - a^2 \neq 0, \quad a \neq \pm(2-b)$$

$$\begin{aligned} \text{このとき, } \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2-b & -a \\ -a & 2-b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(2-b)^2 - a^2} \begin{pmatrix} 2-b & a \\ a & 2-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(2-b+a)(2-b-a)} \begin{pmatrix} 2-b+a \\ a+2-b \end{pmatrix} = \frac{1}{2-b-a} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{より, } f(x) &= \left(\frac{a}{2-b-a} + \frac{b}{2-b-a} + 1 \right) \sin x + \left(\frac{a}{2-b-a} + \frac{b}{2-b-a} + 1 \right) \cos x \\ &= \frac{2}{2-a-b} (\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

[解 説]

いわゆる置き換え型の積分方程式で、超頻出題です。計算の難易もちょうどよく、入試対策の練習問題として適しています

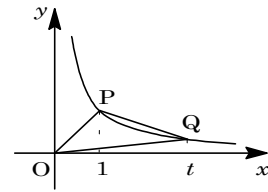
3

問題のページへ

$t > 1$ に対し, $P(1, 1)$, $Q(t, \frac{1}{t})$ より,

$$a(t) = \frac{1}{2} \left| t - \frac{1}{t} \right| = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

また, $b(t) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \int_1^t \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{1}{t} = [\log x]_1^t = \log t$



よって, $c(t) = \frac{b(t)}{a(t)} = \frac{2t \log t}{t^2 - 1}$

$$c'(t) = \frac{2(\log t + 1)(t^2 - 1) - 2t \log t \cdot 2t}{(t^2 - 1)^2} = -\frac{2(t^2 \log t - t^2 + \log t + 1)}{(t^2 - 1)^2}$$

ここで, $f(t) = t^2 \log t - t^2 + \log t + 1$ とおくと,

$$f'(t) = 2t \log t + t^2 \cdot \frac{1}{t} - 2t + \frac{1}{t} = \frac{2t^2 \log t - t^2 + 1}{t}$$

さらに, $g(t) = 2t^2 \log t - t^2 + 1$ とおくと,

$$g'(t) = 4t \log t + 2t^2 \cdot \frac{1}{t} - 2t = 4t \log t$$

$t > 1$ のとき, $g'(t) > 0$ より, $g(t) > g(1) = 0$

よって, $f'(t) > 0$ となり, $f(t) > f(1) = 0$

したがって, $c'(t) < 0$ となるので, $c(t)$ は $t > 1$ においてつねに減少する。

[解 説]

関数の増減についての基本問題です。新しい関数をどんどん設定し、微分していけば、そのうち題意と同値な式にたどりつくというタイプです。

4

問題のページへ

$$(1) a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ より, } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}, b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \dots\dots\dots$$

まず, $b_1 = \frac{a_2}{a_1} = i$ なので, より,

$$b_2 = 1 + \frac{1}{i} = 1 - i, b_3 = 1 + \frac{1}{1-i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

3点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心を $x + yi$ とおくと,

$$|x + yi - i| = |x + yi - (1 - i)| = \left| x + yi - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right|$$

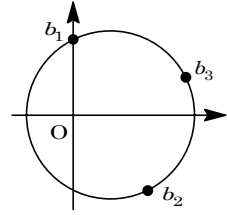
$$|x + (y-1)i| = |(x-1) + (y+1)i| = \left| \left(x - \frac{3}{2} \right) + \left(y - \frac{1}{2} \right) i \right|$$

よって, $x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 \dots\dots\dots$

$$x^2 + (y-1)^2 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 \dots\dots\dots$$

より $2x - 4y = 1$, より $6x - 2y = 3$ なので, $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ となり, 円 C の

中心は点 $\frac{1}{2}$, 半径は $\left| \frac{1}{2} - i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ である.



(2) すべての点 b_n が円 C の周上にあることを数学的帰納法を用いて示す.

(i) $n=1$ のとき 点 b_1 は明らかに円 C の周上にある.

(ii) $n=k$ のとき 点 b_k が円 C の周上にあると仮定する.

$$\left| b_k - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \dots\dots\dots$$

このとき, より $b_{k+1} = 1 + \frac{1}{b_k}$ なので, $b_k = \frac{1}{b_{k+1} - 1}$

$$\text{に代入して, } \left| \frac{1}{b_{k+1} - 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \left| \frac{3 - b_{k+1}}{2(b_{k+1} - 1)} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{|3 - b_{k+1}|}{2|b_{k+1} - 1|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|b_{k+1} - 3| = \sqrt{5}|b_{k+1} - 1|, |b_{k+1} - 1| : |b_{k+1} - 3| = 1 : \sqrt{5}$$

ここで, 2点 1, 3 を結ぶ線分を $1 : \sqrt{5}$ に内分する点を z_1 , $1 : \sqrt{5}$ に外分する点を z_2 とすると, 点 b_{k+1} は2点 z_1, z_2 を直径の両端とする円周上にある.

$$z_1 = \frac{\sqrt{5} \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{5} + 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, z_2 = \frac{\sqrt{5} \cdot 1 - 1 \cdot 3}{\sqrt{5} - 1} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

すると円の中心は $\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2}$, 半径は $\frac{1}{2}|z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ となり, 円 C に一致する.

(i)(ii)より, すべての点 b_n は円 C の周上にある.

[解 説]

複素数平面上における円を題材とした問題です。それに加えて漸化式がスパイスとしてよく効いています。

5

問題のページへ

(1) 最初に x リットルの水が入っているビーカーを X_1 とし、最後に 2 個のビーカーが残ったとき、そのうちの 1 つが X_1 で水の量が $x (= x_1)$ リットルのままでであると仮定する。

この仮定のもとで、ビーカーが 3 個残ったとき、ビーカーを X_1, X_2, X_3 とする。ここで、 X_1 の水の量は x_1 リットルであり、 X_2, X_3 の水の量をそれぞれ x_2, x_3 ($x_2 \geq x_3$) リットルとおくと、 $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ となる。

すると、 $x_1 < \frac{1}{3}$ より $x_2 + x_3 > \frac{2}{3}$ となり、しかも $x_2 \geq x_3$ から $2x_2 > \frac{2}{3}$ 、 $x_2 > \frac{1}{3}$ であ

り、このとき最後の操作を行う。

(i) $x_2 > x_1 > x_3$ のとき

X_3 の水を X_1 に入れ、 X_1 の水の量は x リットルより大となる。

(ii) $x_2 > x_1 = x_3$ のとき

X_1 は取り除かれるか、または X_3 の水を X_1 に入れ、 X_1 の水の量は x リットルより大となる。

(iii) $x_2 \geq x_3 > x_1$ のとき X_1 は取り除かれる。

以上より、ビーカー X_1 は操作の途中で空になって取り除かれるか、または最後まで残って水の量が増えている。

(2) (1)と同様にして、 $m = 4$ のとき、4 個のビーカーの水の量を $x = x_1 > x_2 \geq x_3 \geq x_4$ とし、題意の操作を行った後、 $x_3 + x_4 \geq x > x_2$ となるとする。

このとき、 $1 - x = x_2 + x_3 + x_4 \geq 3x_2$ より、 $x_2 \leq \frac{1-x}{3}$

$$x_3 + x_4 = 1 - x - x_2 \geq 1 - x - \frac{1-x}{3} = 2 \cdot \frac{1-x}{3}$$

すると、 $x - (x_3 + x_4) \leq x - 2 \cdot \frac{1-x}{3} = \frac{5x-2}{3}$

ところが、 $x > \frac{2}{5}$ より $x - (x_3 + x_4) > 0$ となるので、 $x_3 + x_4 \geq x$ となる場合はありえない。よって、残った 3 個のビーカーで水量が最大なのは X_1 である。

同様にして、 $m = 5$ のとき、5 個以上のビーカーが残っており、水量が次の関係を満たすときを考える。

$$x = x_1 > x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_k \geq x_{k+1} \quad (k \geq 4)$$

このとき、題意の操作を行った後、 $x_k + x_{k+1} \geq x > \frac{2}{5}$ となるとする。

すると、 $2x_k \geq x_k + x_{k+1} > \frac{2}{5}$ から $x_k > \frac{1}{5}$ 、すなわち $x_i > \frac{1}{5}$ ($2 \leq i \leq k$) より、

$$1 = x + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} > \frac{2}{5} + \frac{1}{5}(k-1) + x_{k+1} = \frac{1}{5}(k+1) + x_{k+1}$$

$k \geq 4$ より、上式は成立しない。

よって、題意の操作をくり返したとき、残ったビーカーの水量の最大なのは、つねに X_1 である。

以上より、3 個のビーカーが残っているとき X_1 の水量は最大となり、題意の操作を行ってビーカーが 2 個になったとき、ビーカー X_1 は x リットルの水が入ったままで残る。

[解 説]

考えたとおりに書いた冗長な解ですが、あえてシェイプアップをしていません。しかし、この程度にまとめるのにも、ずいぶん時間がかかってしまいました。

6

問題のページへ

- (1) 最初, 2点 A, B はともに原点にあるので, n 回の試行の後, 2点 A, B の距離は 1 以下である。すなわち, $a=b$ または $a=b\pm 1$ となる。

ここで, n 回の試行の後, $a=b$ であるとき, $n+1$ 回目に投げたコインが表, 裏のいずれでも $a\neq b$ となる。また, n 回の試行の後, $a=b+1$ であるとき, $n+1$ 回目に投げたコインが裏のとき $a=b$ となり, n 回の試行の後, $a=b-1$ であるとき, $n+1$ 回目に投げたコインが表のとき $a=b$ となる。

条件より, n 回の試行の後 $a=b$ となる場合の数が X_n , $a\neq b$ となる場合の数が $2^n - X_n$ より, $X_{n+1} = 2^n - X_n$ となる。

- (2) 1 回目の試行の後, A, B の位置は $(a, b) = (1, 0), (0, 1)$ より $X_1 = 0$ となる。

$$(1) \text{より, } X_{n+1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1} = -\left(X_n - \frac{1}{3} \cdot 2^n\right)$$

$$X_n - \frac{1}{3} \cdot 2^n = \left(X_1 - \frac{1}{3} \cdot 2^1\right)(-1)^{n-1} = -\frac{2}{3}(-1)^{n-1} = \frac{2}{3}(-1)^n$$

$$\text{よって, } X_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{2}{3}(-1)^n$$

- (3) n 回の試行の後, $a=b$ となる確率を p_n とすると, $p_n = \frac{X_n}{2^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

すると, $a=b+1$, $a=b-1$ となる確率は, A と B の動きが対等なので, それぞれ $\frac{1}{2}(1-p_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n$ となる。

ここで, n 回コインを投げたときの a の平均を E_n とおくと, $n+1$ 回目に表が出た場合はつねに A を 1 動かし, $n+1$ 回目に裏が出た場合は n 回目に $a=b-1$ であれば A を 1 動かし, $a=b$ または $a=b+1$ であれば動かさないで,

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{1}{2}(E_n + 1) + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n\right)(E_n + 1) + \left(p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n\right)E_n\right\} \\ &= \frac{1}{2}(E_n + 1) + \frac{1}{2}\left(E_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n\right) = E_n + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_n \\ &= E_n + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = E_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

ここで, $E_1 = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$ なので, $n \geq 2$ において,

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(n-1) - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3}\right) \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{2}{3}n + \frac{1}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{9} \quad (\text{この値は } n=1 \text{ のときも満たす}) \end{aligned}$$

[解 説]

コインの表裏がどんな出方をしても, A, B の距離の差は, つねに 1 以下です。この点を見つけるのがポイントとなっています。なお, (1)(2) は文理共通です。