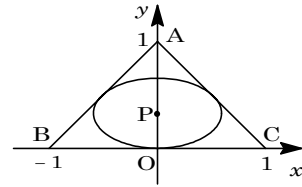


1

問題のページへ

ABC は $\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形で、斜辺 $BC = 2$ より $AB = AC = \sqrt{2}$ となる。ここで BC の中点を原点とする座標系を右図のように設定する。



楕円の中心を $P(0, b)$ とおくと、 x 軸に接することより、その方程式は、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1 \dots\dots$$

また、直線 $AC : x + y = 1 \dots\dots$ となり、楕円 と直線 AC が接するとき、 y 軸に関する対称性から、楕円 は直線 AB とも接する。

さて、このとき図形を y 軸方向に $\frac{a}{b}$ 倍すると、点 $A(0, 1)$ 、 $P(0, b)$ は、それぞれ点 $(0, \frac{a}{b})$ 、 $(0, a)$ に移り、楕円 は $x^2 + (y-a)^2 = a^2 \dots\dots$ 、直線 は $x + \frac{by}{a} = 1$ 、すなわち $ax + by - a = 0 \dots\dots$ となる。

円 と直線 が接する条件は、 の中心 $(0, a)$ と の距離が の半径 a に等しいことより、

$$\frac{|ba - a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = a, \quad a|b-1| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

よって、 $(b-1)^2 = a^2 + b^2$ 、 $b = \frac{1-a^2}{2} \dots\dots$

このとき、楕円の面積 S は、 より、

$$S = \pi ab = \pi a \cdot \frac{1-a^2}{2} = \frac{\pi}{2}(-a^3 + a)$$

ここで、 $0 < a < 1$ で $f(a) = -a^3 + a$ とおくと、

$$f'(a) = -3a^2 + 1$$

右表より、 $f(a)$ は最大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ をとり、この

とき S は最大値 $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{9}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ をとる。

a	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		\nearrow	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	\searrow	

[解 説]

楕円を円に変換して、接する条件を考えてみましたが、ここまでやるほどの問題ではありませんでした。

2

問題のページへ

$S(2w)$ とすると、条件より、

$$|\alpha| = |\alpha - 2w| \dots\dots\dots, \quad |\beta| = |\beta - 2w| \dots\dots\dots$$

まず、 $w = \alpha\beta \neq 0$ のとき、

より、 $|\alpha| = |\alpha - 2\alpha\beta|$, $|\alpha| = |\alpha| |1 - 2\beta|$

$|\alpha| \neq 0$ なので、 $|1 - 2\beta| = 1$, $\left| \beta - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

より、 $|\beta| = |\beta - 2\alpha\beta|$, $|\beta| = |\beta| |1 - 2\alpha|$

$|\beta| \neq 0$ なので、 $|1 - 2\alpha| = 1$, $\left| \alpha - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

より、 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ は中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にある。

逆に、 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ が中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあるとき、

この円周上の異なる 2 点 P, Q を結んだ直線 l は、 P, Q がともに原点以外の点なので、直線 l は原点を通らない。すると、

$$\left| \alpha - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \quad \left| \beta - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

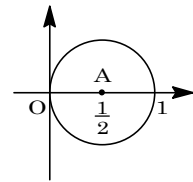
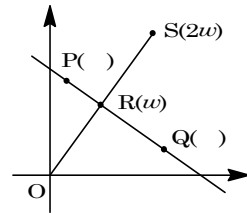
これより、 $|\beta| = |\beta - 2\alpha\beta|$, $|\alpha| = |\alpha - 2\alpha\beta|$

より、 $|\alpha - 2w| = |\alpha - 2\alpha\beta| \dots\dots\dots$, $|\beta - 2w| = |\beta - 2\alpha\beta| \dots\dots\dots$

ここで、 $T(2\alpha\beta)$ とし、 $w \neq \alpha\beta$ とすると、より 2 点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ は線分 TS の垂直二等分線上にある。ところが直線 PQ は線分 OS の垂直二等分線より、 T は O と一致する。すなわち、 $\alpha\beta = 0$ となる。

これは $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ に反するので、 $w = \alpha\beta$ となる。

以上より、 $w = \alpha\beta$ であるための必要十分条件は、 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ が中心 $A\left(\frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることである。



[解 説]

複素数平面上で、直線の方程式は線分の垂直二等分線の形で表現できます。この基本を用いて点 S を設定しました。なお、後半の逆の証明の際、直線 l が原点を通るときと通らないときに場合分けをしていたのですが、前者の場合はありえないことが、図を書くことができました。

3

問題のページへ

(1) 条件より, $f_n((k+1)h) - f_n(kh) = h\{1 - f_n(kh)\} f_n((k+1)h)$

$$p_k = \frac{1}{f_n(kh)} \text{ なので, } \frac{1}{p_{k+1}} - \frac{1}{p_k} = h\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \cdot \frac{1}{p_{k+1}}$$

変形して, $p_{k+1} = (1-h)p_k + h$, $p_{k+1} - 1 = (1-h)(p_k - 1)$

$$p_k - 1 = (p_0 - 1)(1-h)^k = \left(\frac{1}{f_n(0)} - 1\right)(1-h)^k = \left(\frac{1}{c} - 1\right)(1-h)^k$$

$$\text{よって, } p_k = 1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)(1-h)^k$$

(2) $h = \frac{a}{n}$ より, $f_n(a) = f_n(nh) = \frac{1}{p_n}$

(1)より, $p_n = 1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)\left\{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right\}^{-a}$ なので,

$$g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)e^{-a}}$$

(3) (2)より, $g(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{c} - 1\right)e^{-x}}$

$$c = 2 \text{ のとき, } g(x) = \frac{2}{2 - e^{-x}}$$

$$g'(x) = -\frac{2e^{-x}}{(2 - e^{-x})^2}, \quad g''(x) = \frac{2e^{-x}(2 + e^{-x})}{(2 - e^{-x})^3}$$

$c = 1$ のとき, $g(x) = 1$

$$c = \frac{1}{4} \text{ のとき, } g(x) = \frac{1}{1 + 3e^{-x}}$$

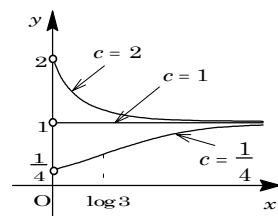
$$g'(x) = \frac{3e^{-x}}{(1 + 3e^{-x})^2}$$

$$g''(x) = \frac{3e^{-x}(3e^{-x} - 1)}{(1 + 3e^{-x})^3}$$

x	0	...	
$g'(x)$		-	
$g''(x)$		+	
$g(x)$	2	↪	1

x	0	...	$\log 3$...	
$g'(x)$		+		+	
$g''(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	↶	$\frac{1}{2}$	↷	1

以上より, $c = 2$, $c = 1$, $c = \frac{1}{4}$ のときの $y = g(x)$ の
 グラフは右図のようになる。ただし, y 軸上の点は除く。



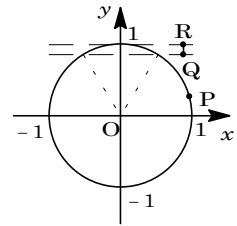
[解 説]

点の集合の上で定義された関数という設定に身構えてしまいましたが, 内容的には基本事項の積み重ねでした。

4

問題のページへ

(1) 点 P は原点が中心の単位円周上の動点であり、また線分 QR は $x = 1 - vt \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y - 1 \end{pmatrix}$ と表せる。

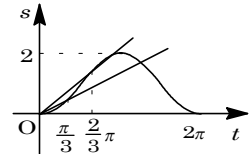


ここで、 $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき、点 P と線分 QR がぶつかるのは、 $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ において、 $\cos t = 1 - vt \dots\dots$ となる t が存在するときである。

より、 $1 - \cos t = vt$ と変形して、

$$s = 1 - \cos t \dots\dots, \quad s = vt \dots\dots$$

そして、 $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ において $s = vt$ が解をもつ条件は、



のグラフがこの区間で共有点をもつ条件に等しい。

そこで、 $s = vt$ が点 $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ を通るとき $v = \frac{3}{2\pi}$ となり、

$s = vt$ が点 $(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{2})$ を通るとき $v = \frac{9}{4\pi}$ となるので、右図から $0 \leq t \leq 2\pi$ で点 P と線分 QR がぶつかる条件は、 $\frac{3}{2\pi} \leq v \leq \frac{9}{4\pi}$ となる。

したがって、ぶつからない条件は、 $0 < v < \frac{3}{2\pi}, \frac{9}{4\pi} < v$ である。

(2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる条件は、 n を 0 以上の整数として、 $2n\pi + \frac{\pi}{3} \leq t \leq 2n\pi + \frac{2}{3}\pi$ において、 $s = vt$ の成立する t がただ 1 つ存在することである。

このとき、点 P と線分 QR がぶつかる条件は、(1)と同様にして、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n + \frac{1}{3})\pi} \leq v \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2n + \frac{2}{3})\pi}, \quad \frac{3}{(12n + 2)\pi} \leq v \leq \frac{9}{(12n + 4)\pi}$$

さて、 $a_n = \frac{3}{(12n + 2)\pi}$,

$b_n = \frac{9}{(12n + 4)\pi}$ とおき、

区間 $a_n \leq v \leq b_n$ を I_n と表す

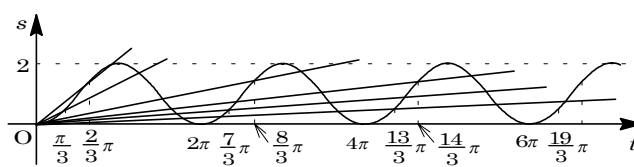
と、求める条件は、ただ 1

つの区間 I_n だけに含まれる v の条件となる。

まず、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は減少数列であり、 $n = 1$ のとき、

$$b_{n+2} - a_n = \frac{9}{(12n + 28)\pi} - \frac{3}{(12n + 2)\pi} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{12n - 11}{(3n + 7)(6n + 1)} > 0$$

よって、 $n = 1$ のとき、 $a_{n+2} < a_{n+1} < a_n < b_{n+2} < b_{n+1} < b_n$ となる。これより、区間 I_{n+1} にある任意の v は区間 I_n または I_{n+2} に必ず含まれる。すなわち、 $n = 2$ の I_n に含まれる v はただ 1 つの区間に含まれるという条件に適さない。



すると、ただ 1 つの区間だけに含まれる v は、 $n = 1$ の I_n に含まれるので、 $n = 0, 1, 2$ のときの区間 I_n を調べると、

$$I_0 : \frac{3}{2\pi} < v < \frac{9}{4\pi}, \quad I_1 : \frac{3}{14\pi} < v < \frac{9}{16\pi}, \quad I_2 : \frac{3}{36\pi} < v < \frac{9}{28\pi}$$

これより、ただ 1 つの区間だけに含まれる v 、すなわち点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる v の範囲は、 $\frac{3}{2\pi} < v < \frac{9}{4\pi}$ 、 $\frac{9}{28\pi} < v < \frac{9}{16\pi}$ となる。

[解 説]

人工衛星が宇宙空間に漂う障害物にぶつかるという趣きの問題でした。ところが、特に(2)の解は書きにくく、時間とエネルギーを費やしてしまいます。グラフから明らかとしては乱暴すぎるので、もう少し丁寧に書こうと心掛けると、深みにはまっていくという感じです。

5

問題のページへ

(1) 和が9になる2つの数の組は、 $0+9$, $1+8$, $2+7$, $3+6$, $4+5$ である。

4けたの数で条件を満たすのは、千の位の決め方が9通り、その各々の場合に対して、百の位は千の位の数および千の位の数との和が9になる数を除いて8通りずつとなる。

同様に考えて、十の位の数は6通りずつ、一の位の数は4通りずつとなるので、求める4けたの S の要素の個数は、 $9 \times 8 \times 6 \times 4 = 1728$ 個となる。

(2) 1けたの数は9個で、(1)と同様に考えて、2けたの数は $9 \times 8 = 72$ 個、3けたの数は $9 \times 8 \times 6 = 432$ 個となる。以上、合わせて、 $9 + 72 + 432 = 513$ 個である。

すると、(1)より4けたの数が1728個あるので、2000番目の数は4けたとなる。

そこで、小さい数から数えて、千の位が1~7の数は、 $7 \times 8 \times 6 \times 4 = 1344$ 個で、合わせて、 $513 + 1344 = 1857$ 個となる。

さらに、千の位が8で、百の位が0, 2, 3, 4, 5, 6の数は $6 \times 6 \times 4 = 144$ 個で、合わせて、 $1857 + 144 = 2001$ 個となる。

したがって、2000番目は、千の位が8、百の位が6の数で大きい方から2番目の数となり、8695である。

[解 説]

前問と異なり、あっさりした問題でした。(2)は見込みを立てて数えあげていく問題ですが、1けたの正の整数のことをすっかり忘れると、大きな被害を被ります。

6

問題のページへ

(1) 条件式の各辺の行列の積を計算すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c+a & ab \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y & yz \\ 0 & 1 & z+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

成分を比べて, $y = c + a$, $yz = ab$, $z + x = b$

まとめて, $y = c + a \dots\dots$, $z = \frac{ab}{y} = \frac{ab}{c+a} \dots\dots$, $x = b - z = \frac{bc}{c+a} \dots\dots$

(2) より $yz = ab \dots\dots$, より $xy = b(y - a) \dots\dots$

より $xy = by - yz$ となり, $y > 0$ より $b = x + z \dots\dots$

より, $a = \frac{yz}{b} = \frac{yz}{x+z} \dots\dots$

より, $c = y - a = y - \frac{yz}{x+z} = \frac{xy}{x+z} \dots\dots$

ここで, 条件から $1 < a < 2$, $1 < b < 2$, $1 < c < 2$ なので,

$$1 < \frac{yz}{x+z} < 2 \dots\dots, 1 < x+z < 2 \dots\dots, 1 < \frac{xy}{x+z} < 2 \dots\dots$$

$y = t$ とすると, より $2 < t < 4$ において,

より, $x+z < tz < 2(x+z)$ から, $\frac{t-2}{2}z < x < (t-1)z$

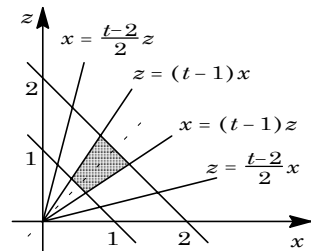
より, $1 < x+z < 2$

より, $x+z < tx < 2(x+z)$ から, $\frac{t-2}{2}x < z < (t-1)x$

(i) $\frac{t-2}{2} < \frac{1}{t-1} < (2 < t < 3)$ のとき

平面 $y = t$ 上で, 不等式 $\frac{t-2}{2}z < x < (t-1)z$ を満たす切り口は右図の網点部のようになる。

切り口の $z = x$ に関する対称性から, まず $z = x$ と $x + z = 2$ の交点を求めると, $(x, z) = (1, 1)$ となる。さらに $z = (t-1)x$ と $x + z = 2$ の交点を求めると, $(x, z) = \left(\frac{2}{t}, \frac{2t-2}{t}\right)$ となるので, その面積 S は,



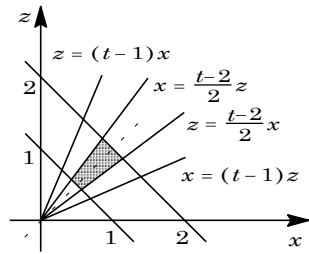
$$\frac{S}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{2t-2}{t} - \frac{2}{t} \right| = \frac{3}{8} \left| \frac{2t-4}{t} \right| = \frac{3(t-2)}{4t}$$

$$S = \frac{3(t-2)}{2t}$$

(ii) $\frac{t-2}{2} < \frac{1}{t-1} (3 < t < 4)$ のとき

平面 $y=t$ 上で, 不等式 $z < x$ を満たす切り口は右図の網点部のようになる。

切り口の $z=x$ に関する対称性から, まず $z=x$ と $x+z=2$ の交点を求めると, $(x, z)=(1, 1)$ となる。さらに, $z=\frac{t-2}{2}x$ と $x+z=2$ の交点を求めると, $(x, z)=\left(\frac{4}{t}, \frac{2t-4}{t}\right)$ となるので, その面積 S は,



$$\frac{S}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \left| \frac{2t-4}{t} - \frac{4}{t} \right| = \frac{3}{8} \left| \frac{2t-8}{t} \right| = \frac{3(4-t)}{4t}$$

$$S = \frac{3(4-t)}{2t}$$

(3) 立体 K の体積を V とすると, (2) より,

$$\begin{aligned} V &= \int_2^3 \frac{3(t-2)}{2t} dt + \int_3^4 \frac{3(4-t)}{2t} dt = \frac{3}{2} \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{t}\right) dt + \frac{3}{2} \int_3^4 \left(\frac{4}{t} - 1\right) dt \\ &= \frac{3}{2} [t - 2 \log t]_2^3 + \frac{3}{2} [4 \log t - t]_3^4 = \frac{3}{2} \left(1 - 2 \log \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \left(4 \log \frac{4}{3} - 1\right) \\ &= -3 \log \frac{3}{2} + 6 \log \frac{4}{3} = -3 \log 3 + 3 \log 2 + 12 \log 2 - 6 \log 3 \\ &= 15 \log 2 - 9 \log 3 \end{aligned}$$

[解 説]

(2)では, a, b, c を x, y, z で表して, x, y, z の条件を求めるという確実な方法をとりました。計算が少々複雑になりますが, 力で押していけば, ゲットできます。