1　解答解説のページへ

$AB = AC$，$BC = 2$ の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点$\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta)$を考える。$\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta)$を通る直線を l, 原点から l に引いた垂線と l の交点を$\mathrm{R}(w)$とする。ただし, 複素数γが表す点 C を$\mathrm{C}(\gamma)$とかく。このとき,「$w=\alpha\beta$であるための必要十分条件は, $\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta)$が中心$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, 半径$\dfrac{1}{2}$の円周上にあることである」を示せ。

3

解答解説のページへ

$a>0$ とする。正の整数 n に対して，区間 $0\leqq x\leqq a$ を n 等分する点の集合

$$\left\{0,\ \frac{a}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}a,\ a\right\}$$

の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり，次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0)=c \\ \dfrac{f_n((k+1)h)-f_n(kh)}{h}=\left\{1-f_n(kh)\right\}f_n((k+1)h)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1) \end{cases}$$

ただし，$h=\dfrac{a}{n}$, $c>0$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ とおいて p_k を求めよ。

(2)　$g(a)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(a)$ とおく。$g(a)$ を求めよ。

(3)　$c=2,\ 1,\ \dfrac{1}{4}$ それぞれの場合について，$y=g(x)$ の $x>0$ でのグラフを書け。

4

解答解説のページへ

座標平面上を運動する 3 点 P，Q，R があり，時刻 t における座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P} : x = \cos t,\quad y = \sin t \qquad \mathrm{Q} : x = 1 - vt,\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{R} : x = 1 - vt,\quad y = 1$$

ただし, v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)　点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π までの間ではぶつからない。

(2)　点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。

5

解答解説のページへ

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字は互いに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない」

ただし, S の要素は 10 進法で表す。また, 1 けたの正の整数は S に含まれるとする。

このとき次の問いに答えよ。

(1) S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。

(2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

(1)　$a,\ b,\ c$ を正の実数とするとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす実数 $x,\ y,\ z$ を $a,\ b,\ c$ で表せ。

(2)　$a,\ b,\ c$ が $1\leqq a\leqq 2,\ 1\leqq b\leqq 2,\ 1\leqq c\leqq 2$ の範囲を動くとき, (1)の $x,\ y,\ z$ を座標とする点 $(x,\ y,\ z)$ が描く立体を K とする。立体 K を平面 $y=t$ で切った切り口の面積を求めよ。

(3)　この立体 K の体積を求めよ。