**1**

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$ を微分して，

$$f'(x)=x\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+(x-1)-2x\log x-x^2\cdot\frac{1}{x}$$
$$=x\log\frac{x^2+1}{2}-2x\log x+x-1$$
$$f''(x)=\log\frac{x^2+1}{2}+x\cdot\frac{2x}{x^2+1}-2\log x-2x\cdot\frac{1}{x}+1$$
$$=\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x^2}{x^2+1}-2\log x-1$$
$$f'''(x)=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}-\frac{2}{x}$$
$$=\frac{2(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)^2}$$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'''(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | | ↘ | 0 | ↗ |

$f''(1)=\log 1+1-2\log 1-1=0$

$x>0$ で $f''(x)\geqq 0$ となるので，$f'(x)$ は単調増加である。

(2)　$f'(1)=\log 1-2\log 1+1-1=0$ なので(1)より，

$0<x<1$ で $f'(x)<0$，$x>1$ で $f'(x)>0$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 0 | ↗ |

$f(1)=\log 1+0-\log 1=0$ なので，$f(x)\geqq 0$

なお，等号成立は $x=1$ のときである。

(3)　(2)より，$\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}\geqq -\dfrac{1}{2}(x-1)^2+x^2\log x$

$x=\dfrac{p}{q}>0$ とおくと，$\dfrac{p^2+q^2}{2q^2}\log\dfrac{p^2+q^2}{2q^2}\geqq -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(p-q)^2}{q^2}+\dfrac{p^2}{q^2}\log\dfrac{p}{q}$

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+p^2\log\frac{p}{q}+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2$$
$$=-\frac{1}{2}(p-q)^2+p^2\log p-p^2\log q+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2$$
$$=-\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2}{2}\log p^2-\frac{p^2}{2}\log q^2+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2$$
$$=-\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

## [解 説]

(1)(2)の誘導に乗れば，(3)の不等式の証明までスムーズに進んでいきます。

**2**

問題のページへ

条件より，$S_1 : (x-10)^2+y^2+z^2=81$ ………①

$S_2 : x^2+(y-10)^2+z^2=64$ ………②

$S_1$ と $S_2$ に接し原点を通る直線は，$(x,\ y,\ z)=t(a,\ b,\ c)$ ………③

ただし，$a^2+b^2+c^2=1$ ………④

まず③を①に代入して，$(at-10)^2+(bt)^2+(ct)^2=81$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-20at+19=0$

④から，$t^2-20at+19=0$

①と③が接するので，$D/4=100a^2-19=0$，$a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10}$ ………⑤

次に③を②に代入して，$(at)^2+(bt-10)^2+(ct)^2=64$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-20bt+36=0$

④から，$t^2-20bt+36=0$

②と③が接するので，$D/4=100b^2-36=0$，$b=\pm\dfrac{3}{5}$ ………⑥

④⑤⑥より，$\dfrac{19}{100}+\dfrac{9}{25}+c^2=1$

$c\geqq 0$ なので，$c=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

以上より，$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号任意）

## [解 説]

図形的な位置関係を考えてもよいのですが，ここでは代数的に解いてみました。こうすると，数式のもつ威力が感じられます。

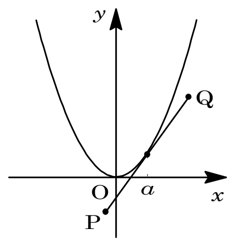
**3**

問題のページへ

$y=x^2$ より，$y'=2x$

点$(a,\ a^2)$での接線は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

よって，線分 PQ は，$y=2ax-a^2\ (a-1\leqq x\leqq a+1)$ ………①




$a$ が$-1\leqq a\leqq 1$の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は，明らかに $y$ 軸対称となる。

さて，①において $x=t\ (t\geqq 0)$ 上での通過領域を考えると，

$$y=2at-a^2=-(a-t)^2+t^2\ (t-1\leqq a\leqq t+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

そこで，②式を $y=f(a)$ とおき，$a$ が$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲を動くとき, $y$ の値のとりうる範囲を求める。

ここで，$y=f(a)$ のグラフの軸が $a=t$ なので, $t$ の値で場合分けをする。

(i)　$t>2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は存在しない。

(ii)　$1<t\leqq 2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲には, $y=f(a)$ の軸は存在しないので，$f(a)$ は単調増加となる。

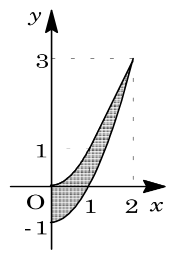
$f(t-1)\leqq y\leqq f(1)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq 2t-1$

(iii) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲に $y=f(a)$ の軸は存在し，しかも $t-1<\dfrac{(t-1)+1}{2}\leqq t\leqq 1$ なので,

$f(t-1)\leqq y\leqq f(t)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq t^2$

(i)(ii)(iii)より，$x\geqq 0$ で線分 PQ の通過領域を図示すると，右図のようになる。




求める面積を $S$ とおくと,

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\left\{x^2-(x^2-1)\right\}dx+\int_1^2\left\{2x-1-(x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx=\frac{5}{3}$$

よって，$S=\dfrac{10}{3}$

## [解 説]

$x$ を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし，本問では 2 点 P, Q だけの軌跡を求めて，直観的に考えることも可能です。

**4**　　問題のページへ

(1)　10 文字を 1 列に並べる場合の数は$10!$通りである。また，どの 2 つの O も隣り合わないのは，まず O 以外の 7 文字を並べ，その間または両端の 8 か所に 3 つの O を 1 つずつ並べるときなので，その場合の数は$7!\times{}_8P_3$通りとなる。

よって，どの 2 つの O も隣り合わない確率は，$\dfrac{7!\times{}_8P_3}{10!}=\dfrac{7}{15}$である。

(2)　O の隣り合っている状態で場合分けをする。

(i)　O が 3 つ隣り合っているとき

3 つ隣り合っている O の並べ方が$3!$通りで，この隣り合っている O を 1 文字とみなし，他の T, H, K, U, B, A, A と合わせて並べる場合の数が$8!$通りとなるので，この場合の確率は，$\dfrac{3!\times 8!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

(ii)　O が 2 つだけ隣り合っていて，それが左端または右端のとき

2 つの O が左端のときは，2 つの O の並べ方が${}_3P_2$通りで，2 つの O の右隣りの文字は T, H, K, U, B, A, A のいずれかで 7 通りとなる。この隣り合っている 3 文字の右側に，もう 1 つの O も入れた他の 7 文字を並べる場合の数は$7!$通りである。2 つの O が右端のときも同じなので，この場合の確率は，$\dfrac{{}_3P_2\times 7\times 7!\times 2}{10!}=\dfrac{7}{60}$

(iii) O が 2 つだけ隣り合っていて，それが両端以外のとき

2 つの O の並べ方が${}_3P_2$通りで，2 つの O の両隣りの文字は T, H, K, U, B, A, A のいずれかで${}_7P_2$通りとなる。この隣り合っている 4 文字を 1 文字とみなし，もう 1 つの O も入れた他の 6 文字と合わせて並べる場合の数は$7!$通りである。よって，この場合の確率は，$\dfrac{{}_3P_2\times{}_7P_2\times 7!}{10!}=\dfrac{7}{20}$

(iv) O が隣り合っていないとき

この場合は 2 つの A が隣り合っていて，その並べ方は$2!$通りで，この隣り合っている A を 1 文字とみなし，他の T, H, K, U, B と合わせて並べる場合の数が$6!$通りとなる。そして，この 6 文字の間または両端の 7 か所に 3 つの O を 1 つずつ並べると考えると，その場合の数は${}_7P_3$通りとなる。よって，この場合の確率は，

$\dfrac{2!\times 6!\times{}_7P_3}{10!}=\dfrac{1}{12}$

(i)～(iv)より，どこかで同じ文字が隣り合う確率は$\dfrac{1}{15}+\dfrac{7}{60}+\dfrac{7}{20}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{37}{60}$である。

## [解 説]

(2)の(i)～(iii)の場合は，闇雲に計算しましたが, (1)の余事象となっていました。

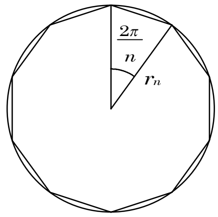
**5**

問題のページへ

(1)　$P_{n-1}$ の面積は $a_{n-1}$ なので，条件(ii)から $D_{n-1}$ の面積も $a_{n-1}$ となる。すると，$D_{n-1}$ の半径は $\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{\pi}}$ となるので，$D_{n-1}$ の周の長さは $2\pi\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{\pi}}=2\sqrt{\pi a_{n-1}}$ である。

また，$P_n$ の面積は $a_n$ なので，その外接円の半径を $r_n$ とすると，

$$\frac{1}{2}{r_n}^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{a_n}{n}\ \cdots\cdots\cdots①$$




さらに，$P_n$ の周の長さは $D_{n-1}$ の周の長さ $2\sqrt{\pi a_{n-1}}$ に等しいことより，

$$2r_n\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{2\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n},\quad r_n\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より $r_n=\dfrac{\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$ となるので，①に代入して，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi a_{n-1}}{n^2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{a_n}{n}$$

よって，$\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{2n\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{\pi\sin\dfrac{2\pi}{n}}=\dfrac{2n\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{2\pi\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}}=\dfrac{n}{\pi}\tan\dfrac{\pi}{n}$

(2)　$\dfrac{\pi}{n}=\theta$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ となる。

$$n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)=\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^2\left(\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=\frac{\pi^2\sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$$

$$=\frac{\pi^2\sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)=\pi^2\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{\theta\to 0}\pi^2\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\pi^2}{2}$

## [解 説]

極限に関する標準問題です。解の方針に迷いは生じないと思います。

**6**

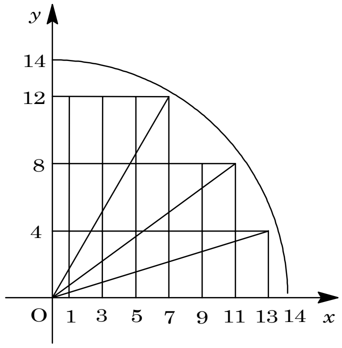
問題のページへ

時刻 $t_0$ までに点 P が進んだ道のりを $L$ とすると,

$$L = \int_0^{t_0} 14e^{-t}dt = -14\left[e^{-t}\right]_0^{t_0} = 14(1-e^{-t_0})\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず, 点 P の軌跡は, 反射した辺に関して長方形 ABCD を折り返していくと, 直線として表せる。

すると点 O を原点とし, 点 A$(1,\ 0)$, 点 B$(1,\ 4)$ として座標設定をすると, 辺に関して折り返していった頂点は, $k, l$ を自然数として, $(2k-1,\ 4l)$ と表される。




ここで, 最も長い時間をかけて P がどれかの頂点に到達するのは, (＊)より $L$ が最も大きいときである。ところが, (＊)より $L<14$ なので, 原点 O からの距離が 14 より小で, しかも 14 に最も近い頂点が求める頂点となる。

(i)　$l=1\ (y=4)$ のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数 $(x=2k-1)$ は $x=13$ であり, このとき $L^2=13^2+4^2=185$ となる。

(ii)　$l=2\ (y=8)$ のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数 $(x=2k-1)$ は $x=11$ であり, このとき $L^2=11^2+8^2=185$ となる。

(iii)　$l=3\ (y=12)$ のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数 $(x=2k-1)$ は $x=7$ であり, このとき $L^2=7^2+12^2=193$ となる。

(i)(ii)(iii)より, $(x,\ y)=(7,\ 12)$ のとき, $L$ は最大になり, $t_0$ も最大となる。

このとき, $\tan\theta=\dfrac{12}{7}$ であり, また(＊)より, $\sqrt{193}=14(1-e^{-t_0})$, $e^{-t_0}=1-\dfrac{\sqrt{193}}{14}$

よって, P が頂点に到達する時刻 $t_0$ は, $t_0=-\log\left(1-\dfrac{\sqrt{193}}{14}\right)$ となる。

## [解 説]

最近, 頻出の反射の問題です。反射面に関して折り返して考えるのがポイントです。97 年に東大・理で同様な問題が出題されていますので, この類題経験がものを言うのではないかと思われます。