

1

解答解説のページへ

$x > 0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \log \frac{x^2 + 1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - x^2 \log x$$

で定める。対数は自然対数である。

- (1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ。
- (2) $f(x) = 0$ であることを示し, $f(x) = 0$ となる x を求めよ。
- (3) 正の実数 p, q について不等式

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} - \frac{1}{2}(p - q)^2 + \frac{p^2 \log p^2 + q^2 \log q^2}{2}$$

が成立することを示せ。

2

解答解説のページへ

空間の点 $(10, 0, 0)$ を中心とする半径 9 の球面を S_1 とし、点 $(0, 10, 0)$ を中心とする半径 8 の球面を S_2 とする。 S_1 と S_2 に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル (a, b, c) ($c > 0$) をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

曲線 $y = x^2$ の点 (a, a^2) での接線を l とする。 l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。 a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

T, O, H, O, K, U, A, O, B, A の 10 文字をでたらめに 1 列に並べる。

- (1) どの 2 つの O も隣り合わない確率を求めよ。
- (2) どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

正 n 角形 P_n を次のようにして定義する。

(i) P_3 は面積が 1 の正三角形である。

(ii) P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする。 P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい正 $n+1$ 角形である。

$n = 3, 4, 5, \dots$ について P_n の面積を a_n としたとき次の各問いに答えよ。

(1) $n \geq 4$ について $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ を n を用いて表せ。

(2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right)$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

長方形 ABCD 内を減速しながら進む点を考える。時刻 $t = 0$ に初速 v で発射させた点 P は、時刻 t では速さ ve^{-t} で直進するとする。ただし、P がいずれかの辺に来たときは等しい入射角と反射角で反射するとし、頂点 A, B, C, D のいずれかに来たときはそこで停止するとする。AB の長さは 4 で AD の長さは 2 とし、出発点は AD の中点 O とする。初速を $v = 14$ としたとき、最も長い時間をかけて P をどれかの頂点に到達させるにはどの方向に発射させればよいか。OA との角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) として $\tan \theta$ を求めよ。またそのとき、P が頂点に到達する時刻を求めよ。

