$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$y=f(x)$を同値変形すると，$x=g(y)$となることより，

$$y=\frac{e^x}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$$ から，$(e^x+1)(1-y)=1$

$$e^x=-1+\frac{1}{1-y}=\frac{y}{1-y},\ \ x=\log\frac{y}{1-y}$$

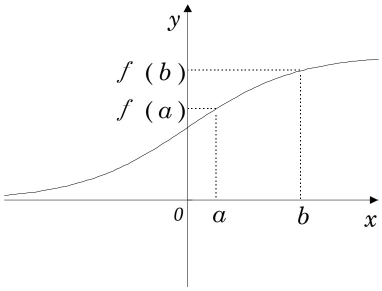
よって，$g(y)=\log\dfrac{y}{1-y}$となり，$g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$

(2)　$x=f(t)$とおくと$dx=f'(t)dt$，また$x=f(a)$のとき$t=a$，$x=f(b)$のとき$t=b$となる。

さらに，$y=f(x)$の逆関数が$y=g(x)$から，$g\big(f(x)\big)=x$

$$\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=\int_a^b g\big(f(t)\big)f'(t)dt=\int_a^b tf'(t)dt=\int_a^b xf'(x)dx$$

よって，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx$



$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b xf'(x)dx$$
$$=\int_a^b\{f(x)+xf'(x)\}dx$$
$$=\int_a^b\big(xf(x)\big)'dx$$
$$=\big[xf(x)\big]_a^b$$
$$=bf(b)-af(a)$$

[解 説]

(2)の証明は，まず右上の図で考えました。この位置関係では面積を考えると与式の成立は明らかなのですが，これでは証明とは言えません。積分の第 2 項の積分区間を$[a,\ b]$に変更することから，置換の式をみつけました。なお，つい先日発売された旺文社の『入試問題正解』を見ていたところ，本問を驚くことに面積を用いて「証明」をし，さらにaやbが負でも同様，としてありました。あきれました。

2

問題のページへ

(1) ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2=(a+c)A-(ac+b^2)E$

条件より$a+c=-1$なので，$A^2=-A-(ac+b^2)E$ ………①

両辺のトレースを比べると，$-1=-(-1)-2(ac+b^2)$

よって，$ac+b^2=1$………②

①より，$A^2=-A-E$ ………③

③から，$A^3=A(-A-E)=-A^2-A=-(-A-E)-A=E$ ………④

(2) ③④より，$(A+E)^4=(-A^2)^4=A^8=(A^3)^2\cdot A^2=A^2$

すると，与えられた連立１次方程式は,

$$A^2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$$

ここで④より，$A^2A=AA^2=E$から$(A^2)^{-1}=A$となる。

よって，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\-b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab-ab\\-b^2-ac\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ （②より）

[解 説]

成分計算を極力排してストイックに書いてみましたが，この解は最初に解いたときのものではありません。スタイルを重視して後から書き直したものです。実は，最初(2)は，$(A+E)^4=-A-E$とし，成分計算をして結論を導きました。

3

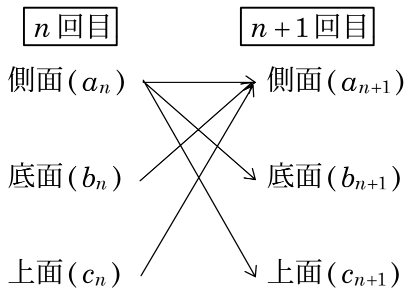
問題のページへ

(1)　1 回横に倒すと印の面は側面なので，もう 1 回倒して印の面が側面となる確率は，$\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ となる。よって，$a_2=\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の上面にくる確率を c_n とすると，

$$a_n+b_n+c_n=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

状態の推移は右のようになる。



$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n+c_n \cdots\cdots\cdots ②$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n \cdots\cdots\cdots ③$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{4}a_n \cdots\cdots\cdots ④$$

①を②に代入して

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+(1-a_n)=-\frac{1}{2}a_n+1 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(3)　⑤より，$a_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{2}{3}\right)$

(1)から $a_1=1$ なので，

$$a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$$

③より，$n\geqq 2$ で $b_n=\dfrac{1}{4}a_{n-1}=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+\dfrac{2}{3}\right\}=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}+\dfrac{1}{6} \cdots\cdots\cdots ⑥$

⑥に $n=1$ をあてはめると，$b_1=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{6}=0$ となり適する。

よって，$b_n=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}+\dfrac{1}{6}$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{6}$

[解 説]

よく見かける問題で，調べたところ類題が，95 年名大・文，91 年東大・理で出ています。本問では，漸化式の利用という誘導がついていますので，方針に迷うことはありませんが，上記の 2 大学では誘導がありませんでした。

4

問題のページへ

(1) 条件より，$\sin x = a\sin y$ ………①，$\cos x = b\cos y$ ………②

①②を $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ に代入して，$a^2\sin^2 y + b^2\cos^2 y = 1$

両辺÷$\cos^2 y$ より，$a^2\tan^2 y + b^2 = \dfrac{1}{\cos^2 y}$

$1 + \tan^2 y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ なので，$a^2\tan^2 y + b^2 = 1 + \tan^2 y$

よって，$a \neq \pm 1$ から $\tan^2 y = \dfrac{1 - b^2}{a^2 - 1}$

(2) $a \neq 0$，$b \neq 0$ なので，①②より $\tan x = \dfrac{a}{b}\tan y$ ………③

$b \neq \pm 1$ から，実数 y の条件は $\tan^2 y = \dfrac{1 - b^2}{a^2 - 1} > 0$

このとき，③から実数 x は存在する。

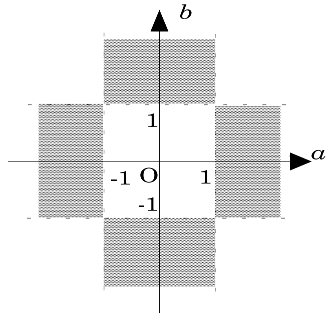
以上より，求める条件は $\dfrac{1 - b^2}{a^2 - 1} > 0$

よって，$(1 - b^2)(a^2 - 1) > 0$

$(a-1)(a+1)(b-1)(b+1) < 0$ ………④

境界線は $a = \pm 1$，$b = \pm 1$ で，点 $(2,\ 2)$ を④に代入すると不成立なので，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は右図のようになる。

ただし，境界線および座標軸上の点は含まない。



[解 説]

(2)は 2 乗が正ということだけですが，これは必要条件だけにすぎないのではないかと不安が頭をよぎってしまいます。そのため十分性についても少し触れておきました。

5

問題のページへ

$x^2+a|x-1|+b=0$ から，$x^2+a|x-1|=-b$ ………①

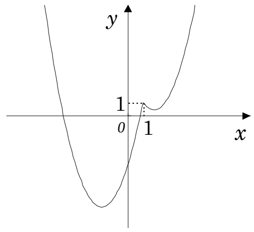
①が異なる実数解をもつ条件は，$y=x^2+a|x-1|$ ……②と $y=-b$ ……③のグラフが異なる共有点を 2 個もつことである。

曲線②は定点$(1,\ 1)$を通り，

$x\geqq 1$ のとき，$y=x^2+ax-a=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a$

$x<1$ のとき，$y=x^2-ax+a=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$

(i)　$\dfrac{a}{2}<-1$　$(a<-2)$のとき

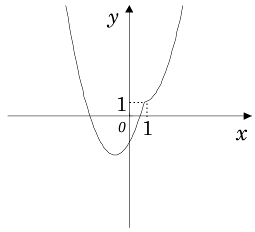


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$-b>1$ または $-\dfrac{a^2}{4}+a<-b<-\dfrac{a^2}{4}-a$

$b<-1$ または $\dfrac{a^2}{4}-a>b>\dfrac{a^2}{4}+a$

(ii)　$-1\leqq\dfrac{a}{2}<1$　$(-2\leqq a<2)$のとき

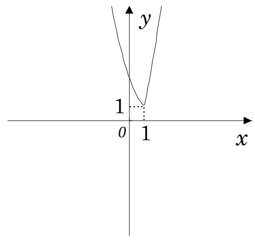


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$-\dfrac{a^2}{4}+a<-b$

$\dfrac{a^2}{4}-a>b$

(iii)　$1\leqq\dfrac{a}{2}$　$(2\leqq a)$のとき

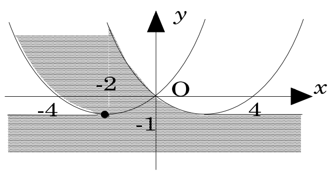


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$1<-b$

$-1>b$

(i)(ii)(iii)より，点$(a,\ b)$の存在する範囲は右図のようになる。ただし点$(-2,\ -1)$以外の境界は含まない。



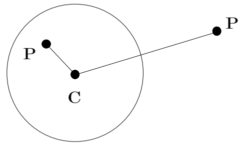
[解 説]

本来は，(ii)の場合をさらに a の値が正負で細かく分けていたのですが，両者とも同じ条件になるのでまとめてしまいました。もっとも，まとめた最大の理由は，スペースなのですが。

6

問題のページへ

(1)　円 C の中心を $\mathrm{C}(a,\ b)$ とすると，



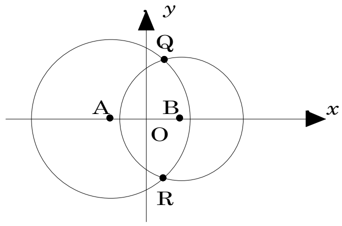
(i)　P が円 C の外部にあるとき

$$d = \mathrm{PC} - r = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} - r$$

(ii)　P が円 C の内部にあるとき

$$d = r - \mathrm{PC} = r - \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2}$$

(2)　C_1 の中心を $\mathrm{A}(-4,\ 0)$，C_2 の中心を $\mathrm{B}(4,\ 0)$ とし，C_1 と C_2 の交点を $\mathrm{Q}(2,\ 3\sqrt{5})$，$\mathrm{R}(2,\ -3\sqrt{5})$ とおく。



(i)　P が円 C_1，C_2 の外部にあるとき

$\mathrm{PA} - 9 = \mathrm{PB} - 7$ より $\mathrm{PA} - \mathrm{PB} = 2$

P は 2 点 A, B を焦点とする双曲線の点 B に近い方の枝である。

その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　$(a^2 + b^2 = c^2)$ とすると，$2a = 2$，$c = 4$

$a = 1$，$b = \sqrt{15}$ から，$x^2 - \dfrac{y^2}{15} = 1$

(ii)　P が円 C_1，C_2 の内部にあるとき

$9 - \mathrm{PA} = 7 - \mathrm{PB}$ より $\mathrm{PA} - \mathrm{PB} = 2$ なので，(i)と同じく $x^2 - \dfrac{y^2}{15} = 1$

(iii) P が円 C_1 の外部，円 C_2 の内部にあるとき

$\mathrm{PA} - 9 = 7 - \mathrm{PB}$ より $\mathrm{PA} + \mathrm{PB} = 16$ で，P は 2 点 A, B を焦点とする楕円である。

その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　$(a^2 - b^2 = c^2)$ とすると，$2a = 16$，$c = 4$

$a = 8$，$b = 4\sqrt{3}$ から，$\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

(iv) P が円 C_1 の内部，円 C_2 の外部にあるとき

$9 - \mathrm{PA} = \mathrm{PB} - 7$ より $\mathrm{PA} + \mathrm{PB} = 16$ なので，(iii)と同じく $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

以上より，P の軌跡の方程式は，$x^2 - \dfrac{y^2}{15} = 1$　$(1 \leqq x)$，$\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

[解　説]

今年，頻出の 2 次曲線の定義を利用する問題の 1 つです。おもしろい設定ですので，丁寧に書いてみました。なお，2 交点 Q, R に点 P が一致したときも条件をみたすのは明らかですので，軌跡は曲線全体になります。なお，これから出版される 98 年度入試問題集には，必ず掲載されると思える問題です。