1

解答解説のページへ

赤玉 4 個と白玉 5 個の入った，中の見えない袋がある。玉はすべて，色が区別できる他には違いはないものとする。A，B の 2 人が，A から交互に，袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし，その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし，ゲームを終了する。

(1)　このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。

(2)　このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\sin 3x+\sin x$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち，最小のものを求めよ。

(2)　正の整数 m に対して，$f(x)=0$ を満たす正の実数 x のうち，m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}$ を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

s を実数とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = s,\ (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　a_n を n と s を用いて表せ。

(2)　ある正の整数 m に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ が成り立つとする。s を m を用いて表せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

実数$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$に対して，整式$f(x)=x^2-ax+1$を考える。

(1)　整式$x^4+x^3+x^2+x+1$は$f(x)$で割り切れることを示せ。

(2)　方程式$f(x)=0$の虚数解であって虚部が正のものをαとする。αを極形式で表せ。ただし，$r^5=1$を満たす実数 r が$r=1$のみであることは，認めて使用してよい。

(3)　設問(2)の虚数αに対して，$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}$の値を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，次が成り立つとする。

$$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=\sqrt{6},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=3$$

ただし，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ は，2 つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す。さらに，線分 OC と線分 AB は垂直であるとする。点 C から 3 点 O, A, B を含む平面に下ろした垂線を CH とし，点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線を OK とする。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ は平行であることを示せ。

6

解答解説のページへ

関数$f(x)=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{6x+1}$について，以下の問いに答えよ。

(1)　曲線$y=f(x)$の接線で，傾きが 1 であり，かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ。

(2)　座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える。実数 x が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け。また S の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 赤玉 4 個と白玉 5 個の入った袋から, A, B の 2 人が, A から交互に, 袋から玉を 1 個ずつ取り出す。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。そして, A が赤玉を取り出したら A の勝ち, B が白玉を取り出したら B の勝ち, 袋から玉がなくなったら引き分けとする。

　このとき, 引き分けとなるのは, A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(白)と取り出す場合で, その確率は $\dfrac{5!\times 4!}{9!}=\dfrac{1}{126}$ である。

(2) A が勝つのは次の場合があり, それぞれの確率は,

(i) A(赤)のとき　$\dfrac{{}_4\mathrm{P}_1}{{}_9\mathrm{P}_1}=\dfrac{4}{9}$

(ii) A(白)→B(赤)→A(赤)のとき　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_1\times{}_4\mathrm{P}_2}{{}_9\mathrm{P}_3}=\dfrac{5}{42}$

(iii) A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(赤)のとき　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_3}{{}_9\mathrm{P}_5}=\dfrac{2}{63}$

(iv) A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(白)→B(赤)→A(赤)のとき　$\dfrac{{}_5\mathrm{P}_3\times{}_4\mathrm{P}_4}{{}_9\mathrm{P}_7}=\dfrac{1}{126}$

(i)〜(iv)より, A が勝つ確率は, $\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{42}+\dfrac{2}{63}+\dfrac{1}{126}=\dfrac{38}{63}$ である。

［解 説］

確率についての基本題です。計算ミスだけに要注意です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\sin 3x+\sin x$ を変形すると，$f(x)=2\sin 2x\cos x=4\sin x\cos^2 x$

すると，$f(x)=0\ (x>0)$ の最小の解は，$x=\dfrac{\pi}{2}$ である。

(2)　$f(x)=0\ (x>0)$ の解は，$\sin x=0$ または $\cos x=0$ から，

$$x=\frac{k}{2}\pi\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ここで，$x\leqq m$ であるのは，$\dfrac{k}{2}\pi\leqq m$ から $k\leqq\dfrac{2m}{\pi}$ となるので，m 以下の正の解の個数を $p(m)$ とすると，$p(m)=\left[\dfrac{2m}{\pi}\right]$ である。

すると，$\dfrac{2m}{\pi}-1<\left[\dfrac{2m}{\pi}\right]\leqq\dfrac{2m}{\pi}$ から，$\dfrac{2m}{\pi}-1<p(m)\leqq\dfrac{2m}{\pi}$ となり，

$$\frac{2}{\pi}-\frac{1}{m}<\frac{p(m)}{m}\leqq\frac{2}{\pi}$$

よって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m}=\frac{2}{\pi}$ である。

［解 説］

基本的な数列の極限の問題です。(2)では，いったんガウス記号を用いて立式し，その後，不等式として評価するという処理をしています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$a_1 = s$，$(n+2)a_{n+1} = na_n + 2$ に対して，両辺 $\times(n+1)$ とすると，

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} = n(n+1)a_n + 2(n+1)$$

ここで，$b_n = n(n+1)a_n$ とおくと $b_{n+1} = b_n + 2(n+1)$ となり，$n \geqq 2$ において，

$$b_n = b_1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1\cdot 2\cdot a_1 + 2\cdot\frac{2+n}{2}(n-1) = 2s + (n+2)(n-1)$$

$$= n^2 + n + 2s - 2$$

この式は，$n = 1$ のときも成り立っており，

$$a_n = \frac{b_n}{n(n+1)} = \frac{n^2+n+2s-2}{n(n+1)} = 1 + \frac{2s-2}{n(n+1)}$$

(2)　ある正の整数 m に対して，

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m}\left\{1 + \frac{2s-2}{n(n+1)}\right\} = m + (2s-2)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= m + (2s-2)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = m + \frac{(2s-2)m}{m+1} = \frac{m}{m+1}(m+2s-1)$$

すると，$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n = 0$ より $m+2s-1 = 0$ となり，$s = \dfrac{1-m}{2}$ である。

［解　説］

漸化式を解く問題です。ポイントは 1 行目の $n+1$ をかけるという変形です。

4

問題のページへ

(1)　$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して $f(x)=x^2-ax+1$，そして $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ とおき，$g(x)$ を $f(x)$ で割ると，

$$g(x)=f(x)\{x^2+(1+a)x+a(1+a)\}-a(1-a-a^2)x+(1-a-a^2)$$

ここで，$2a=\sqrt{5}-1$ から $2a+1=\sqrt{5}$ となり，$(2a+1)^2=5$ から，

$$4a^2+4a+1=5,\ a^2+a-1=0$$

すると，$g(x)=f(x)\{x^2+(1+a)x+1\}$……①から，$g(x)$ は $f(x)$ で割り切れる。

(2)　$(x-1)g(x)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$ となり，①から，

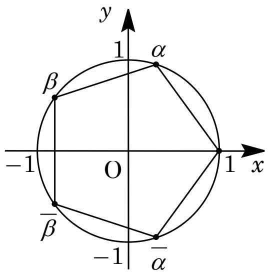
$$x^5-1=(x-1)f(x)\{x^2+(1+a)x+1\}$$
$$=(x-1)(x^2-ax+1)\{x^2+(1+a)x+1\}$$

すると，$x^5=1$ すなわち $x^5-1=0$ のとき，

$$x-1=0\ \text{……②},\ x^2-ax+1=0\ \text{……③},\ x^2+(1+a)x+1=0\ \text{……④}$$

これより，$x^5=1$ は，②から実数解 $x=1$ をもち，③から虚数解 $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$，④から虚数解 $x=\beta$，$\overline{\beta}$（β の虚部は正）をもつとすると，

$$\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=\frac{a}{2}>0,\ \frac{\beta+\overline{\beta}}{2}=\frac{-1-a}{2}<0$$



よって，$x^5=1$ の解は，複素数平面上で右図のような位置関係になり，$\arg\alpha=\dfrac{2}{5}\pi$ から，

$$\alpha=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$$

(3)　まず，$|\alpha|=1$ から $\alpha\overline{\alpha}=1$ となり，$\alpha^{-1}=\overline{\alpha}$ である。

また，$\alpha^5=1$ で，$2023=5\times404+3$ から，

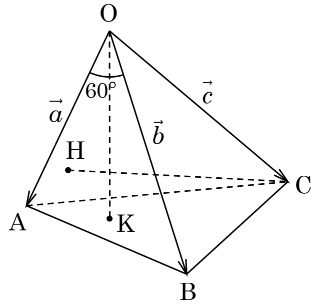
$$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}=\alpha^3+\alpha^{-3}=\alpha^3+(\overline{\alpha})^3=\overline{\beta}+\beta=-1-a$$
$$=-1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

［解　説］

複素数平面と n 乗根を題材にした問題です。(2)の問題文「ただし，……」が方針決定の鍵になっています。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　四面体 OABC において，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=\sqrt{6}$，

$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ のとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$$

また，$\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から $\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ となり，

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{b}=3$$

(2)　平面 OAB に垂直な線分 CH に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ となり，

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=0$ から $s\cdot2^2+t\cdot3-3=0$ となり，$4s+3t=3$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=0$ から $s\cdot3+t\cdot3^2-3=0$ となり，$s+3t=1$ ………②

①②より，$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{9}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}$ である。

(3)　平面 ABC に垂直な線分 OK に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ $(p+q+r=1)$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ から，$(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ となり，

$$p(2^2-3)+q(3-3^2)+r(3-3)=0,\ p-6q=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ から，$(p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$ となり，

$$p(2^2-3)+q(3-3)+r(3-6)=0,\ p-3r=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④と $p+q+r=1$ から $p+\dfrac{1}{6}p+\dfrac{1}{3}p=1$ となり，$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{9}$，$r=\dfrac{2}{9}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{HK}}=\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}\right)=\dfrac{2}{9}\vec{c}$ となり，$\vec{c}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{HK}}$ である。

［解　説］

空間ベクトルと図形の基本的な問題です。計算も質・量ともに穏やかです。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{4}{6x+1}$ に対して，$f'(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{24}{(6x+1)^2}$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の傾きが 1 より，$f'(t)=1$ から，

$$1=-\frac{1}{2}+\frac{24}{(6t+1)^2},\quad \frac{24}{(6t+1)^2}=\frac{3}{2},\quad (6t+1)^2=16$$

$t>0$ のとき，$6t+1=4$ から $t=\dfrac{1}{2}$ となり，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{3+1}=-\dfrac{5}{4}$

よって，求める接線の方程式は，$y+\dfrac{5}{4}=x-\dfrac{1}{2}$ から $y=x-\dfrac{7}{4}$ である。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ において，曲線 $y=f(x)$ の概形を描くために，$f'(x)=0$ とおくと，

$$\frac{24}{(6x+1)^2}=\frac{1}{2},\quad (6x+1)^2=48$$

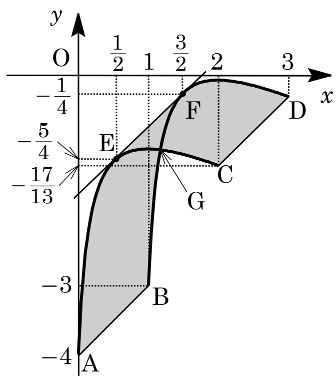
$6x+1=4\sqrt{3}$ から，$x=\dfrac{4\sqrt{3}-1}{6}$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{4\sqrt{3}-1}{6}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$		$\searrow$	$-\dfrac{17}{13}$

また，$f''(x)=-\dfrac{288}{(6x+1)^3}<0$ なので，曲線 $y=f(x)$ は，つねに上に凸である。

さて，点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ は曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上を動き，点 $\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ は，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,\ 1)$ から $y=f(x-1)+1$ $(1\leqq x\leqq 3)$ 上を動く。すると，線分 PQ が通過してできる図形 S は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



ここで，$\mathrm{A}(0,\ -4)$，$\mathrm{B}(1,\ -3)$，$\mathrm{C}\left(2,\ -\dfrac{17}{13}\right)$，$\mathrm{D}\left(3,\ -\dfrac{4}{13}\right)$ とおき，また傾き 1 の接線との接点を $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{4}\right)$，$\mathrm{F}\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$ とする。そして，$y=f(x)$ と $y=f(x-1)+1$ との交点を G とおくと，$f(x)=f(x-1)+1$ から，

$$-\frac{1}{2}x-\frac{4}{6x+1}=-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{4}{6(x-1)+1}+1,\quad -\frac{4}{6x+1}=-\frac{4}{6x-5}+\frac{3}{2}$$

$$\frac{24}{(6x+1)(6x-5)}=\frac{3}{2},\quad (6x-5)(6x+1)=16,\quad 12x^2-8x-7=0$$

これより，$(6x-7)(2x+1)=0$ となり，点 G の x 座標は $x=\dfrac{7}{6}$ である。

そこで, 図形 S の面積を T とおき, 線分 AB, 弧 BF, 線分 FE, 弧 EA によって囲まれた部分の面積を T_1, 線分 CD, 弧 DF, 線分 FE, 弧 EC によって囲まれた部分の面積を T_2, 弧 GF, 線分 FE, 弧 EG によって囲まれた部分の面積を T_3 とおくと,

$$T = T_1 + T_2 - T_3 \cdots\cdots\cdots(*)$$

T_1 は平行四辺形 ABFE の面積に等しく, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{11}{4}\right)$ から,

$$T_1 = \left|1\cdot\frac{11}{4} - 1\cdot\frac{1}{2}\right| = \frac{9}{4}$$

T_2 は平行四辺形 CDFE の面積に等しく, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{52}\right)$ から,

$$T_2 = \left|1\cdot\frac{3}{52} - 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{81}{52}$$

T_3 は, 直線 EF の方程式が $y = x - \frac{7}{4}$ であることを用いて,

$$T_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}}\left\{\left(x-\frac{7}{4}\right) - f(x)\right\}dx + \int_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(x-\frac{7}{4}\right) - \left(f(x-1)+1\right)\right\}dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{7}{4}\right)dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}} f(x)\,dx - \int_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}}\left(f(x-1)+1\right)dx$$

ここで, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{7}{4}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{7}{4}x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{7}{4}\cdot 1 = -\frac{3}{4}$

また, $t = x-1$ とおくと, $dt = dx$ となり,

$$\int_{\frac{7}{6}}^{\frac{3}{2}}\left(f(x-1)+1\right)dx = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\left(f(t)+1\right)dt = \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \frac{1}{3}$$

まとめると, $T_3 = -\frac{3}{4} - \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt - \frac{1}{3}$ となり,

$$T_3 = -\frac{13}{12} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{6}} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = -\frac{13}{12} - \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}} f(x)\,dx$$

$$= -\frac{13}{12} - \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{4}{6x+1}\right)dx = -\frac{13}{12} + \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}\log|6x+1|\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{7}{6}}$$

$$= -\frac{13}{12} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\log 4 = -\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\log 2$$

したがって, $(*)$より, $T = \frac{9}{4} + \frac{81}{52} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\log 2\right) = \frac{237}{52} - \frac{4}{3}\log 2$ である。

［解 説］

線分の通過領域の問題です。ただ, この領域の面積について, T_1 と T_2 は平行四辺形に着目して求めましたが, T_3 は最初, 定積分をそのまま計算して疲労困憊。そこで, 少し工夫をしたのが, 上の解答例です。