1

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。曲線 $y=ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ。

2

解答解説のページへ

正八角形 $\mathrm{A_1A_2\cdots A_8}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。

(3)　4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件(＊)を満たすものの個数を求めよ。

(＊)　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

平面において, 2 つの点 O, A の間の距離が 1 であるとし, 点 O と点 A を中心とする 2 つの円をそれぞれ C_1 , C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点 P, Q において交わり, $\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\pi}{3}$ であるとし, C_2 の半径 r は $r<1$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 の半径を求めよ。

(2)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき, $\angle\mathrm{PAO}$ の大きさを求めよ。

(3)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき, 円 C_1 の内部と円 C_2 の内部との共通部分の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　3 次関数 $y=x^3+x^2$ のグラフと 2 次関数 $y=x^2+4x+16$ のグラフの共通接線(どちらのグラフにも接する直線)は 2 本ある。それらの方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた 2 本の共通接線と 2 次関数 $y=x^2+4x+16$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

曲線 $y=ax^2+bx+1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたない条件は,

(i)　$a=0$ のとき

y 切片が 1 の直線 $y=bx+1$ になるので, 傾き b について $b\geqq 0$ である。

(ii)　$a>0$ のとき

放物線 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+1$ に対して, 軸の位置で場合分けをすると,

(ii-i)　$-\dfrac{b}{2a}\leqq 0$ $(b\geqq 0)$ のとき

点 $(0,\ 1)$ を通過し, つねに x 軸の正の部分と共有点をもたず適する。

(ii-ii)　$-\dfrac{b}{2a}>0$ $(b<0)$ のとき

頂点が x 軸の上側にあることより, $-\dfrac{b^2}{4a}+1>0$ から $b^2<4a$ である。

(iii)　$a<0$ のとき

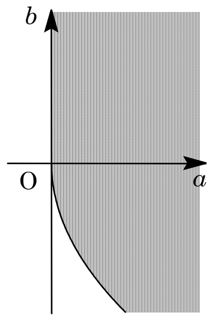
点 $(0,\ 1)$ を通過し, 放物線はつねに x 軸の正の部分と交わり不適である。

(i)～(iii)より, 求める $(a,\ b)$ の条件は,

$$a\geqq 0 \text{ かつ } b\geqq 0$$

$$a>0 \text{ かつ } b<0 \text{ かつ } b^2<4a$$

この不等式を ab 平面上に図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は $a=0$ $(b\geqq 0)$ のみを含む。

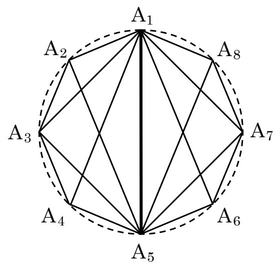


［解 説］

放物線と直線の問題で, そのイメージをもとに, 丁寧な場合分けがすべてといってもよいタイプです。

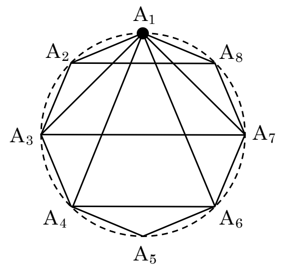
2

問題のページへ



(1)　正八角形$A_1A_2\cdots A_8$の 3 個の頂点を結んでできる三角形が直角三角形になるのは，正八角形の外接円の直径が直角三角形の斜辺になる場合である。

すると，斜辺のとり方が 4 通りで，それぞれに対してもう 1 つの頂点が 6 通りずつ決まるので，直角三角形の個数は$4\times6=24$である。



(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形が二等辺三角形になるのは，頂角の頂点のとり方が 8 通りで，それぞれに対して底辺が 3 通りずつ決まるので，二等辺三角形の個数は$8\times3=24$である。

また，直角二等辺三角形の個数は$8\times1=8$である。

すると，三角形の総数は${}_8C_3=56$より，三角形が直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数は，

$$56-(24+24-8)=16$$

(3)　4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形が作れるものは，外接円の直径の位置が 4 通りあるのに注意して，

(i)　四角形の 1 辺が外接円の直径のとき

直径の両端以外の 2 頂点は直径の片側にあり，そのとり方は${}_3C_2\times2=6$通りずつなので，この場合の四角形の個数は$4\times6=24$である。

(ii)　四角形の 2 本の対角線が外接円の直径のとき

この場合の四角形の個数は，2 本の対角線の決め方から${}_4C_2=6$である。

(iii) 四角形の 1 本の対角線だけが外接円の直径のとき

直径の両端以外の 2 頂点は直径の両側にあり，そのとり方は$3\times3=9$通りずつである。この中でもう 1 つの対角線も直径である(ii)の場合が 3 通りずつより，この場合の四角形の個数は，$4\times(9-3)=24$である。

(i)～(iii)より，求める四角形の個数は，$24+6+24=54$である。

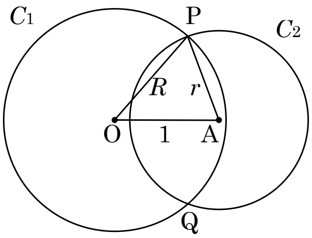
［解　説］

場合の数について，ときどき見かけるタイプの問題です。重複やもれを防ぐには，具体的に考えていくのがベストでしょう。

3

問題のページへ

(1)　C_1 の半径 R，C_2 の半径 r，$\mathrm{OA}=1$，$\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\pi}{3}$ より，



△OPA に余弦定理を適用すると，

$$R^2+r^2-2Rr\cos\frac{\pi}{3}=1,\ R^2+r^2-Rr=1$$

$$R^2-rR+r^2-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$0<r<1$ より $r^2-1<0$ となり，①は正の解と負の解を 1 つずつもつので，$R>0$ から，

$$R=\frac{r+\sqrt{r^2-4(r^2-1)}}{2}=\frac{r+\sqrt{4-3r^2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

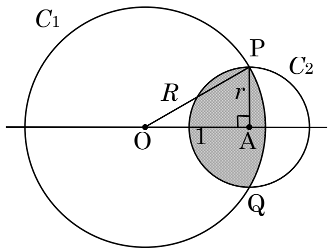
(2)　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，②より $R=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{4-3\cdot\dfrac{1}{3}}\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

△OPA に余弦定理を適用すると，$\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2=1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\cdot1\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cos\angle\mathrm{PAO}$

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{PAO}=1+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=0$$

よって，$\cos\angle\mathrm{PAO}=0$ から，$\angle\mathrm{PAO}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

(3)　(2)から，$\angle\mathrm{POA}=\dfrac{\pi}{6}$ となり，C_1 の内部と C_2 の内部の共通部分の面積を S とおくと，



$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi}{12}=\frac{7}{36}\pi-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

よって，$S=\dfrac{7}{18}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

［解 説］

余弦定理の応用についての基本的な問題です。座標系の設定は不要でした。

4

問題のページへ

(1)　まず，3 次関数 $y=x^3+x^2$ ……①について，$y'=3x^2+2x$ となり，グラフ上の点 $(t,\ t^3+t^2)$ における接線の方程式は，

$$y-(t^3+t^2)=(3t^2+2t)(x-t),\ \ y=(3t^2+2t)x-2t^3-t^2 \ \cdots\cdots②$$

また，2 次関数 $y=x^2+4x+16$ ……③について，$y'=2x+4$ となり，グラフ上の点 $(s,\ s^2+4s+16)$ における接線の方程式は，

$$y-(s^2+4s+16)=(2s+4)(x-s),\ \ y=(2s+4)x-s^2+16 \ \cdots\cdots④$$

条件より，②と④が一致するので，

$$3t^2+2t=2s+4 \ \cdots\cdots⑤,\ \ -2t^3-t^2=-s^2+16 \ \cdots\cdots⑥$$

⑤より $s=\dfrac{1}{2}(3t^2+2t-4)$ となり，⑥に代入すると，

$$-2t^3-t^2=-\frac{1}{4}(3t^2+2t-4)^2+16,\ \ (3t^2+2t-4)^2-4(2t^3+t^2+16)=0$$

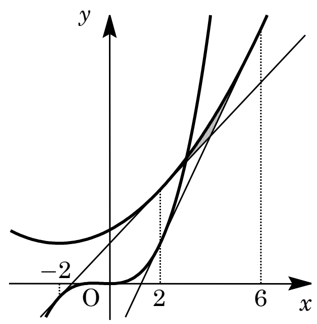
整理すると，$9t^4+4t^3-24t^2-16t-48=0$ となり，

$$(t-2)(t+2)(9t^2+4t+12)=0$$

$9t^2+4t+12=0$ は実数解をもたないので $t=\pm 2$ となり，②から接線の方程式は，

$t=2$ のとき $y=16x-20$ ……⑦，$t=-2$ のとき $y=8x+12$ ……⑧

(2)　⑤より，$t=2$ のとき $s=6$，$t=-2$ のとき $s=2$



ここで，⑦⑧を連立して，$16x-20=8x+12$ から，

$$8x=32,\ \ x=4$$

これより，2 本の共通接線⑦⑧と 2 次関数③のグラフで囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_2^4\{(x^2+4x+16)-(8x+12)\}dx+\int_4^6\{(x^2+4x+16)-(16x-20)\}dx$$

$$=\int_2^4(x-2)^2dx+\int_4^6(x-6)^2dx=\Big[\frac{1}{3}(x-2)^3\Big]_2^4+\Big[\frac{1}{3}(x-6)^3\Big]_4^6$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

［解　説］

接線と面積についての超頻出題です。ただ，数値計算が面倒ですが。