$\boxed{1}$

解答解説のページへ

$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$ である△ABC の頂点 B から辺 AC に下ろした垂線と辺 AC との交点を H とする。

(1)　$\angle\mathrm{BAC}$ を θ と表すとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　実数 s は $0<s<1$ の範囲を動くとする。辺 BH を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値およびそのときの s の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を 0 でない実数とする。xy 平面において，円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0$，直線 $L: -4x+3y+a=0$，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ を考える。

(1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。

(2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) 集合 $\{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と L の共有点 $\} \cup \{\mathrm{P} \mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

n を正の整数, a, b を 0 以上の整数とする。

(1)　$n \geqq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。

(3)　等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 $(a,\ b,\ n)$ をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

白玉 3 個，赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し，硬貨を投げて表が出たら，その玉を手元に残し，裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また，最初手元に玉はないものとする。

(1)　2 回の試行の結果，手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。

(2)　3 回の試行の結果，手元の玉が白玉 1 個，赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。

(3)　n を 5 以上の整数とし，ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。

(4)　(3)の確率 p_n が最大となる n を求めよ。

5

解答解説のページへ

実数 t に対して複素数 $z=\dfrac{-1}{t+i}$ を考える。ただし，i は虚数単位とする。

(1) z の実部と虚部をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 絶対値 $\left|z-\dfrac{i}{2}\right|$ を求めよ。

(3) 実数 t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，点 z はどのような図形を描くか，複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

正の整数 m, n に対して実数 $A(m,\ n)$ を次の定積分で定める。

$$A(m,\ n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$A(m,\ n)=A(n,\ m),\ \ A(m+2,\ n)+A(m,\ n+2)=A(m,\ n)$$

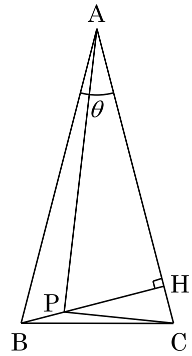
(2) $A(m,\ 1)$ を求めよ。

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。$A(m,\ n+2)=\dfrac{n+1}{m+1}A(m+2,\ n)$

(4) m または n が奇数ならば，$A(m,\ n)$ は有理数であることを示せ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}$である△ABC に余弦定理を適用して，

$$\cos\theta=\frac{1^2+1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\cdot1\cdot1}=\frac{7}{8}$$

また，$0<\theta<\pi$から，$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

(2)　まず，$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$で，$\mathrm{BP}:\mathrm{PH}=s:(1-s)$から，

$$\mathrm{BP}=s\mathrm{BH}=\frac{\sqrt{15}}{8}s,\ \ \mathrm{PH}=(1-s)\mathrm{BH}=\frac{\sqrt{15}}{8}(1-s)$$

また，$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\cos\theta=\dfrac{7}{8}$，$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}-\mathrm{AH}=\dfrac{1}{8}$となり，

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{PH}^2=\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2$$

$$\mathrm{CP}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{PH}^2=\frac{1}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2$$

ここで，$F(s)=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$とおくと，

$$F(s)=\frac{49}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2+\frac{15}{64}s^2+\frac{1}{64}+\frac{15}{64}(1-s)^2=\frac{15}{64}(3s^2-4s+2)+\frac{50}{64}$$

$$=\frac{15}{64}\left\{3\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right\}+\frac{50}{64}=\frac{45}{64}\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{15}{16}$$

すると，$0<s<1$から，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$は$s=\dfrac{2}{3}$のとき最小値$\dfrac{15}{16}$をとる。

［解　説］

二等辺三角形を題材にした計量問題です。(2)では座標系を設定し，2 点間の距離の公式で処理する方法も考えられます。

2

問題のページへ

(1)　円 $C: x^2-2ax+y^2-4y+4=0\ (a\neq 0)$ ……①に対し，$(x-a)^2+(y-2)^2=a^2$ と変形すると，円 C は，中心 $(a,\ 2)$ で半径 $|a|$ である。

また，直線 $L: -4x+3y+a=0$ ……②，直線 $M: 3x+4y-7a=0$ ……③に対し，L と M の交点は，②③を連立して，$25y-25a=0$ から，

$$y=a,\ x=\frac{1}{4}(3a+a)=a$$

すると，交点 $(a,\ a)$ が C 上にある条件は，$(a-a)^2+(a-2)^2=a^2$ より，

$$-4a+4=0,\ a=1$$

(2)　C と L が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，$\dfrac{|-4a+3\cdot 2+a|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}<|a|$ から，

$$|-3a+6|<5|a|,\ 9(a-2)^2<25a^2,\ 4a^2+9a-9>0$$

すると，$(4a-3)(a+3)>0$ より，$a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a$ である。

(3)　まず，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}$ の要素の個数は，(2)から，

$a<-3,\ \dfrac{3}{4}<a$ のとき 2 個，$a=-3,\ \dfrac{3}{4}$ のとき 1 個，$-3<a<\dfrac{3}{4}$ のとき 0 個

また，C と M が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，$\dfrac{|3a+4\cdot 2-7a|}{\sqrt{3^2+4^2}}<|a|$ から，

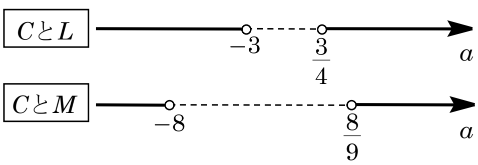
$$|-4a+8|<5|a|,\ 16(a-2)^2<25a^2,\ 9a^2+64a-64>0$$

すると，$(9a-8)(a+8)>0$ より，$a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$ である。

これより，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数は，

$a<-8,\ \dfrac{8}{9}<a$ のとき 2 個，$a=-8,\ \dfrac{8}{9}$ のとき 1 個，$-8<a<\dfrac{8}{9}$ のとき 0 個

以上より，C と L の共有点の個数，C と M の共有点の個数について，数直線を用いてまとめると右図のようになる。ただし，実線部の範囲は 2 個，白丸の値は 1 個，破線部の範囲は 0 個を意味する。



右上図より，C と L の共有点と C と M の共有点が，合わせて 3 個になるのは，$a=-8$ または $a=\dfrac{8}{9}$ のときである。

また，$a=1$ のときは，C と L の共有点と C と M の共有点は 2 個ずつであるが，(1)から，このうちの 1 つは重なるため，この場合も合わせて 3 個になる。

よって，集合 $\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と L の共有点 $\}\cup\{\mathrm{P}\mid$ 点 P は C と M の共有点 $\}$ の要素の個数が 3 となる a の値は，$a=-8,\ \dfrac{8}{9},\ 1$ である。

［解 説］

円と直線についての問題です。(1)の誘導のおかげで，(3)の設問についてのケアレスミスは減少すると思われます。

3

問題のページへ

(1)　n が $n \geqq 3$ の整数のとき，不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ の成立を数学的帰納法で示す。

(i)　$n = 3$ のとき　$3^3 - (2^3 + 3^2 + 8) = 27 - 25 = 2 > 0$ となり成立している。

(ii)　$n = k$ のとき　$2^k + k^2 + 8 < 3^k$ の成立を仮定すると，

$$3^{k+1} - \{2^{k+1} + (k+1)^2 + 8\} > 3(2^k + k^2 + 8) - (2\cdot 2^k + k^2 + 2k + 9)$$
$$= 2^k + 2k^2 - 2k + 15 = 2^k + 2k(k-1) + 15$$

$k \geqq 3$ より，$2^k + 2k(k-1) + 15 > 0$ となり，$n = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n \geqq 3$ のとき，不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ は成立する。

(2)　不等式 $2^n + n^2 + 8 \geqq 3^n$ ……①を満たす正の整数 n について，(1)の結果より，$n < 3$ が必要である。以下，$n = 1,\ 2$ のとき成立するかどうかを調べる。

(i)　$n = 1$ のとき　$2^1 + 1^2 + 8 = 11$，$3^1 = 3$ より，①は成立している。

(ii)　$n = 2$ のとき　$2^2 + 2^2 + 8 = 16$，$3^2 = 9$ より，①は成立している。

以上より，①を満たす正の整数 n は，$n = 1,\ 2$ である。

(3)　まず，n は正の整数，a, b は 0 以上の整数から，$3^n + an + b \geqq 3^n$ となる。

これより，等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ ……②を満たす $a,\ b,\ n$ の組について，不等式①が成立することが必要であり，すなわち $n = 1,\ 2$ となる。

(i)　$n = 1$ のとき　②から，$11 = 3 + a + b$ より $a + b = 8$ となり，

$(a,\ b) = (a,\ 8 - b)$　$(a = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

(ii)　$n = 2$ のとき　②から，$16 = 9 + 2a + b$ より $2a + b = 7$ となり，

$(a,\ b) = (a,\ 7 - 2a)$　$(a = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$

(i)(ii)より，②を満たす $(a,\ b,\ n)$ の組は，

$(0,\ 8,\ 1)$，$(1,\ 7,\ 1)$，$(2,\ 6,\ 1)$，$(3,\ 5,\ 1)$，$(4,\ 4,\ 1)$

$(5,\ 3,\ 1)$，$(6,\ 2,\ 1)$，$(7,\ 1,\ 1)$，$(8,\ 0,\ 1)$，$(0,\ 7,\ 2)$

$(1,\ 5,\ 2)$，$(2,\ 3,\ 2)$，$(3,\ 1,\ 2)$

［解　説］

非常に細かい誘導のついた不定方程式の問題です。(1)は数学的帰納法で証明していますが，二項定理の利用も考えられます。なお，設問(2)は，ちょっと驚きです。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　白玉 3 個, 赤玉 2 個が入った箱から無作為に玉を 1 個取り出し, 硬貨を投げて表が出たらその玉を手元に残し, 裏が出たら箱に戻すという試行に対して, 白玉を取り出し硬貨が表という事象を A, 赤玉を取り出し硬貨が表という事象を B, 任意の玉を取り出し硬貨が裏という事象を C とする。

2 回の試行の結果, 手元に白玉が 2 個あるのは, $A\to A$ の場合より, その確率は,

$$\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{40}$$

(2)　3 回の試行の結果, 手元の玉が白玉 1 個, 赤玉 1 個となるのは, 次の場合があり,

(i)　$A\to B\to C$ の場合　この確率は, $\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(1\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{80}$

(ii)　$A\to C\to B$ の場合　この確率は, $\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(1\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{80}$

(iii) $B\to A\to C$ の場合　この確率は, $\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(1\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{80}$

(iv) $B\to C\to A$ の場合　この確率は, $\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(1\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{80}$

(v)　$C\to A\to B$ の場合　この確率は, $\left(1\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{80}$

(vi) $C\to B\to A$ の場合　この確率は, $\left(1\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{80}$

(i)～(vi)より, 求める確率は, $\frac{3}{80}\times 6=\frac{9}{40}$ である。

(3)　$n\geqq 5$ のとき, ちょうど n 回目で試行が停止するのは, 硬貨の出方が, n 回目に表, $n-1$ 回目までに表が 4 回, 裏が $n-5$ 回の場合である。この確率 p_n は,

$$p_n={}_{n-1}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot 2^{n+3}}$$

(4)　(3)より, $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2^{n+4}}\cdot\dfrac{3\cdot 2^{n+3}}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}=\dfrac{n}{2(n-4)}$

(a)　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1$ $(p_n<p_{n+1})$ のとき　$\dfrac{n}{2(n-4)}>1$ より $n<8$

(b)　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=1$ $(p_n=p_{n+1})$ のとき　$\dfrac{n}{2(n-4)}=1$ より $n=8$

(c)　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$ $(p_n>p_{n+1})$ のとき　$\dfrac{n}{2(n-4)}<1$ より $n>8$

(a)(b)(c)より, $p_5<p_6<p_7<p_8=p_9>p_{10}>p_{11}>p_{12}>\cdots$

よって, p_n が最大となる n は, $n=8,\ 9$ である。

［解 説］

確率の標準的な問題です。ただ, 内容的に, 前半と後半は別問題です。なお, (2)は説明上, 場合分けをしましたが, 必須というわけではありません。

5

問題のページへ

(1)　実数 t に対して，$z=\dfrac{-1}{t+i}=\dfrac{-(t-i)}{(t+i)(t-i)}=\dfrac{-t+i}{t^2+1}=\dfrac{-t}{t^2+1}+\dfrac{1}{t^2+1}i$

これより，z の実部は $\dfrac{-t}{t^2+1}$，虚部は $\dfrac{1}{t^2+1}$ となる。

(2)　$z-\dfrac{i}{2}=\dfrac{-t}{t^2+1}+\left(\dfrac{1}{t^2+1}-\dfrac{1}{2}\right)i$ となり，

$$\left|z-\frac{i}{2}\right|^2=\left(\frac{-t}{t^2+1}\right)^2+\left(\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{t^2}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{(t^2+1)^2}-\frac{1}{t^2+1}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{t^2+1-(t^2+1)}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

よって，$\left|z-\dfrac{i}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ ………(＊)である。

(3)　(＊)より，点 z は，点 $\dfrac{i}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある。

さて，$z=x+yi$ とおくと，(1)から

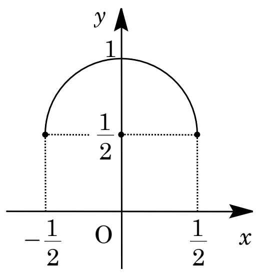
$$x=\frac{-t}{t^2+1},\quad y=\frac{1}{t^2+1}$$

実数 t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{(t^2+1)-t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=-(t^2+1)^{-2}\cdot 2t=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	0
x	$\dfrac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	$\dfrac{1}{2}$	↗	1	↘	$\dfrac{1}{2}$

したがって，点 z が描く図形は，点 $\dfrac{i}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の上半分となる。これを，複素数平面上に図示すると，右図の半円である。



［解　説］

複素平面上の軌跡についての問題です。非常に細かく誘導がつけられています。(3)では，x と y の比から軌跡の限界を調べる方法もあります。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　$A(m,\ n)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx$ (m, n は正の整数)に対して，$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと，

$$A(m,\ n)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t\cos^n t\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\sin^m x\,dx=A(n,\ m)$$

$$A(m+2,\ n)+A(m,\ n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^{m+2}x\sin^n x+\cos^m x\sin^{n+2}x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x(\cos^2 x+\sin^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx=A(m,\ n)$$

(2)　$A(m,\ 1)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin x\,dx=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{m+1}(0-1)=\frac{1}{m+1}$

(3)　$A(m,\ n+2)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin x\sin^{n+1}x\,dx$

$$=\left[-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x\sin^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}x\sin^n x\cos x\,dx$$

$$=\frac{n+1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+2}x\sin^n x\,dx=\frac{n+1}{m+1}A(m+2,\ n)$$

(4)　(3)より，$A(m,\ n)=\dfrac{n-1}{m+1}A(m+2,\ n-2)$ $(n\geqq 3)$ となり，n が奇数のとき，

$$A(m,\ n)=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}A(m+4,\ n-4)$$
$$=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdot\frac{n-5}{m+5}A(m+6,\ n-6)$$
$$=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdot\frac{n-5}{m+5}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-2}A(m+n-1,\ 1)$$
$$=\frac{n-1}{m+1}\cdot\frac{n-3}{m+3}\cdot\frac{n-5}{m+5}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-2}\cdot\frac{1}{m+n}$$

(2)から $A(m,\ 1)$ も有理数なので，n が奇数のとき $A(m,\ n)$ は有理数である。
また，$A(m,\ n)=A(n,\ m)$ から，m が奇数のとき $A(m,\ n)$ は有理数である。
したがって，m または n が奇数ならば，$A(m,\ n)$ は有理数である。

［解 説］

定積分の計算についての問題です。(3)は部分積分を利用して漸化式をつくる有名題です。なお，(1)で証明した2番目の等式の意味が気になりますが……。